

1. Vektori

Skalāri un vektoriāli lielumi

Lai raksturotu kādu objektu vai procesu, tā īpašības parasti apraksta, izmantojot dažādus skaitliskus raksturlielumus. Piemēram, laiks, kas nepieciešams, lai izlasītu šo paragrāfu, varētu būt 2 minūtes, telpas temperatūra, kurā atrodamies, varētu būt $+22^{\circ}\text{C}$, bet mācību klases grīdas laukums 24 m^2 .

Aprakstot tādus lielumus kā laiks, temperatūra, garums, tilpums, svars vai cena, ir pietiekami lietot situācijai atbilstošu **skaitli** un **mērvienību**, tādā veidā gūstot pilnīgu priekšstatu par apskatāmo lielumu.

Lielumus, kurus nosaka tikai tā skaitliskā vērtība, sauc par **skalāriem lielumiem**.

Tomēr ir procesi, kuru raksturošanai ne vienmēr pietiek tikai ar vienu skaitlisku raksturlielumu. Piemēram, apskatot tādus lielumus kā spēks, pārvietojums vai paātrinājums, bez to skaitliskās vērtības svarīgs ir arī virziens. Piemēram, pieliekot vienu un to pašu spēku, ķermeni var pārvietot dažādos virzienos, braucot ar vienu un to pašu ātrumu, var doties dažādos virzienos utt.

Lielumus, kurus nosaka gan skaitliskā vērtība, gan virziens, sauc par **vektoriāliem lielumiem**.

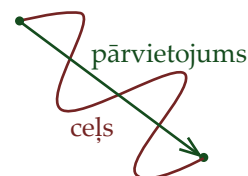
Atšķirību starp skalāru un vektoriālu lielumu viegli saprast, piemēram, aplūkojot kādā kustībā veikto ceļu un pārvietojumu.

Ceļš raksturo noieto attāluma vienību (piemēram, metru vai kilometru) daudzumu. Tas ir skalārs lielums, jo, sakot "noieti 400 m", pilnīgi skaidrs, cik garš ceļš ir veikts. Savukārt, **pārvietojums** raksturo objekta attālumu no kustības sākumpunkta līdz kustības beigu punktam "pa gaisa līniju". Pārvietojums ir vektoriāls lielums, jo, lai to raksturotu, svarīgi zināt, cik tālu no sākumpunkta kustības beigās atrodas objekts, kā arī tas, kādā virzienā šis pārvietojums noticis — piemēram, 400 m dienvidaustrumu virzienā.

Latīņu valodā '*scalaris*' — kāpņveidīgs, ar pakāpieniem.



1.1. att. No latīņu valodas '*vector*' — vedējs, nesējs.



1.2. att.

Uzdevumi

- 1.1.** Doti dažādi lielumu pāri. Izvirzi hipotēzi, kurš pāris šeit neiederas. Paskaidro to.
- | | |
|--------------------------|-----------------------|
| a) Darbs, paātrinājums; | d) laukums, augstums; |
| b) spēks, ceļš; | e) ātrums, masa; |
| c) pārvietojums, garums; | f) svars, masa. |

Vektora jēdziens, vektora modulis



Interesanti

Vektora jēdzienu lieto arī medicīnā. Par vektoru medicīnā sauc organismu, kas satur noteiktu informāciju un pārnēs DNS vai RNS molekulas. To bieži izmanto gēnu inženierijā.

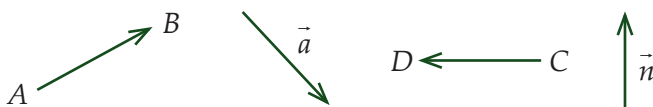
Lai vektoriālus lielumus attēlotu grafiski, izmanto vektorus.

Vektors ir orientēts nogrieznis, kuru raksturo noteikts garums un virziens.

Katram vektoram ir sākumpunkts un galapunkts.

Vektorus var apzīmēt:

- ar diviem lielajiem burtiem, liekot virs tiem bultiņu, ievērojot, ka pirmais burts atbilst vektora sākumpunktam, bet otrs — tā galapunktam, piemēram, $\overline{AB}$, $\overline{CD}$;
- ar vienu mazo burtu, liekot virs tā bultiņu, piemēram, $\vec{a}$, $\vec{n}$.



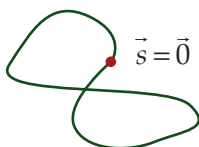
1.3. att.

Vektoram atbilstošā nogriežņa garumu sauc par **vektora moduli jeb vektora garumu** un apzīmē ar $|\vec{a}|$.

Ja $|\vec{a}| = 5$ cm, tad vektors $\vec{a}$ ir 5 cm garš, ja $|\overline{AB}| = 10$, tad vektors $\overline{AB}$ ir 10 vienības garš.

Vektoru, kura sākumpunkts sakrīt ar galapunktu, sauc par **nulles vektoru** un pieraksta: $\vec{0}$.

Nulles vektora (jeb nullvektora) garums ir vienāds ar 0: $|\vec{0}| = 0$.



1.4. att. Ja ceļa sākumpunkts sakrīt ar galapunktu, tad pārvietojums ir $\vec{0}$.



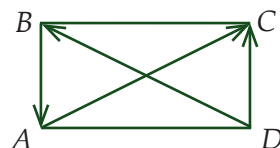
Uzdevumi

1.2. Cik dažādus vektorus nosaka visi iespējamie punktu pāri, kurus veido romba virsotnes? Uzraksti tos.

1.3. Uzraksti atšķirību starp:

- a) nogriezni un vektoru; b) staru un vektoru; c) taisni un vektoru.

1.4. Taisnstūra $ABCD$ mala $AB = 3$, $AD = 4$ (skat. 1.5. att.). Nosaki vektoru $\overline{BA}$, $\overline{DC}$, $\overline{DB}$, $\overline{AC}$ garumus.



1.5. att.

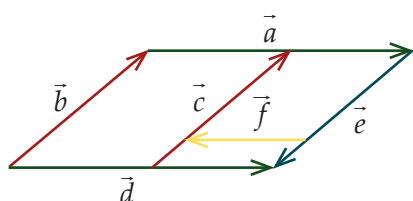
1.5. Uzzīmē dotos vektorus, ja

- a) $|\overline{KL}| = 3,5$ cm, c) $|\vec{t}| = 0$,
b) $|\vec{c}| = \frac{3}{5}$ dm, d) $|\overline{AB}| = 2$ un $|\overline{AC}| = 3$.

Vienādi, vienādi vērsti, pretēji un pretēji vērsti vektori

Ja vektori $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{CD}$ atrodas uz vienas vai uz paralēlām taisnēm un, ja stari AB un CD ir vienādi vērsti, tad vektorus $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{CD}$ sauc par **vienādi vērstiem vektoriem**.

Ja stari AB un CD ir pretēji vērsti, tad vektorus $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{CD}$ sauc par **pretēji vērstiem vektoriem**.

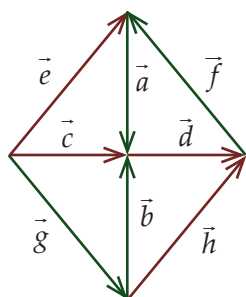


1.6 att. Vienādi vērsti vektori ir $\vec{a}$ un $\vec{d}$, $\vec{c}$ un $\vec{b}$;
pretēji vērsti vektori ir $\vec{c}$ un $\vec{e}$, $\vec{f}$ un $\vec{a}$.

Vienādi vērsti un pretēji vērsti vektori var būt gan vienāda, gan dažāda garuma.

Vektorus $\vec{a}$ un $\vec{b}$, kuru moduli un virzieni ir vienādi, sauc par **vienādiem vektoriem** un pieraksta $\vec{a} = \vec{b}$.

Vektorus $\vec{a}$ un $\vec{b}$, kuru moduli ir vienādi, bet vērsumi pretēji, sauc par **pretējiem vektoriem** un pieraksta $\vec{a} = -\vec{b}$.



1.8. att.

Ja četrstūris ir rombs (skat. 1.8. att.), tad $\vec{c} = \vec{d}$, jo to vērsumi ir vienādi un $|\vec{c}| = |\vec{d}|$ kā romba diagonāles puses.

$\vec{e} = \vec{h}$, jo to vērsumi ir vienādi un $|\vec{e}| = |\vec{h}|$ kā romba malas.

Savukārt, vektori $\vec{a}$ un $\vec{b}$, kā arī $\vec{f}$ un $\vec{g}$ ir pretēji vektori, jo to moduli ir vienādi, bet vērsumi pretēji.



1.7. att. $\vec{F}_1$ un $\vec{F}_2$ vienādi vērsti vektori, bet, piemēram, $\vec{F}_2$ un $\vec{F}_3$ ir pretēji vērsti vektori.

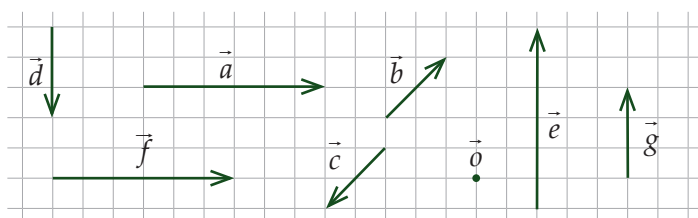


Vektorus, kas atrodas vienā plaknē un uz paralēlām taisnēm, sauc arī par **kolineāriem vektoriem**.



1.6. Izmantojot doto 1.9. attēlu, uzraksti vektorus, kas ir

- vienādi vērsti vektori,
- pretēji vektori,
- nulles vektori,
- vienādi vektori,
- pretēji vērsti vektori.



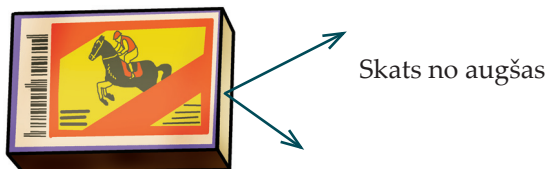
1.9. att.



Pētniecisks uzdevums

1.7. Nepieciešamie materiāli. Klucītis vai kastīte (piemēram, sērkociņu kastīte), divas aukliņas.

Uzdevums. Strādājot pāri, izveidojiet modeli no kastītes un aukliņām (skat. 1.10. att.) un to lēnām velciet aiz aukliņām. Vērojiet un mēģiniet uzzīmēt, kādā virzienā pārvietojas kastīte. Izvirziet hipotēzi par priekšmeta pārvietošanās virzienu, un kā tas rodas.

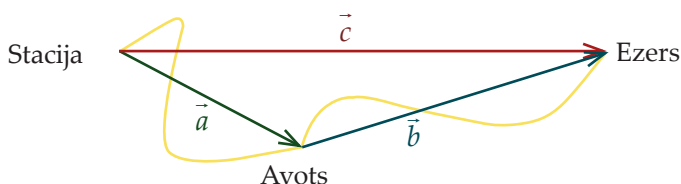


1.10. att.

Šajā mācību kursā apskatīsim vektoru saskaitīšanu, atņemšanu un vektora reizināšanu ar skaitli. Šo darbību rezultāti atkarīgi gan no vektoru garumiem, gan no to savstarpējiem vērsumiem.

Vektoru saskaitīšana

1.11. attēlā parādīts tūristu grupas pārgājiena ceļš divu dienu garumā. Pirmajā dienā viņi nogāja ceļu no Stacijas līdz Avotam, bet otrajā — veica ceļu no Avota līdz Ezeram. Katras dienas veikto pārvietojumu var attēlot ar vektoriem $\vec{a}$ un $\vec{b}$, kas attiecīgi savieno katras dienas maršruta sākumpunktu un galapunktu.



1.11. att.

Acīmredzams, ka kopējo divu dienu pārgājienam atbilstošo pārvietojumu raksturo vektors $\vec{c}$, kas savieno Staciju un Ezeru — pārgājiena sākumpunktu un galapunktu. Šādā situācijā **vektoru $\vec{c}$ sauc par vektoru $\vec{a}$ un $\vec{b}$ summu.**

Līdzīgi ir, ja uz kādu ķermeni darbojas vairāki spēki. Tādā gadījumā kopējais spēks atbilst atsevišķo spēku vektoru summai.

Lai saskaitītu divus vektorus, var izmantot vai nu **trijstūra likumu** vai **paralelograma likumu**.



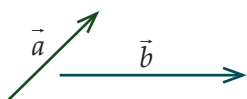
1.12. att.

Kādiem jābūt attēlā dotajiem spēkiem $\vec{F}_1$ un $\vec{F}_2$, lai meitene neiekristu ūdenī?

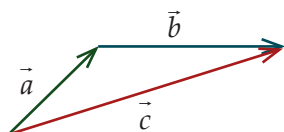
Trijstūra likums.

Ja vektori $\vec{a}$ un $\vec{b}$ atlikti viens otra galā, tad summas vektors $\vec{c}$ savieno pirmā vektora sākumpunktu ar otrā vektora galapunktu.

Lai 1.13. attēlā dotos vektorus saskaitītu pēc trijstūra likuma, rīkojas, kā parādīts 1.14. attēlā.



1.13. att.



1.14. att. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$.

Saskaitot 1.15. attēlā redzamos vektorus $\overrightarrow{AB}$ un $\overrightarrow{BC}$, pēc trijstūra likuma, iegūst vektoru $\overrightarrow{AC}$, kura sākumpunkts ir pirmā vektora sākumpunkts un galapunkts ir otrā vektora galapunkts.



1.15. att. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
 $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$.

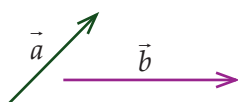


Ievēro! $\overrightarrow{SK} + \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{SL}$

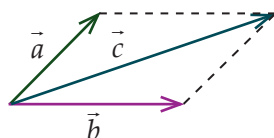
Paralelograma likums.

Ja vektori $\vec{a}$ un $\vec{b}$ atlikti no kopīga sākumpunkta, tad summas vektors $\vec{c}$ iziet no vektoru kopīgā sākumpunkta un ir tāda paralelograma diagonāle, kura malas ir vektori $\vec{a}$ un $\vec{b}$.

Lai 1.16. attēlā dotos vektorus saskaitītu pēc paralelograma likuma, rīkojas, kā parādīts 1.17. attēlā.



1.16. att.

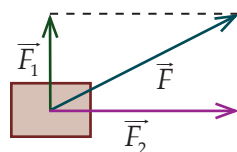


1.17. att. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$.

Saskaitot vektorus gan pēc trijstūra likuma, gan pēc paralelograma likuma, summā iegūst vienu un to pašu vektoru.

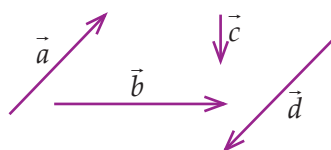
Pārliecinieties par to paši!

Vairāku vektoru summu iegūst, ja pakāpeniski pie pirmā vektora pieskaitot otro vektoru, pie to summas — trešo vektoru, pie trīs vektoru summas — nākamo vektoru utt. Līdz ar to vairākas reizes pēc kārtas tiek izmantots vektoru saskaitīšanas trijstūra likums.

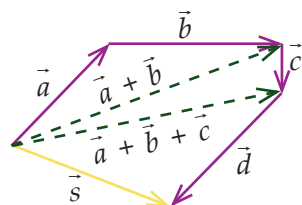


1.18. att. Ja uz ķermeni darbojas divi spēki $\vec{F}_1$ un $\vec{F}_2$, tad kopspēka jeb rezultējošā spēka $\vec{F}$ virzienu un lielumu var noteikt ar paralelograma likumu.

1.19. attēlā doto vektoru summas vektora iegūšana attēlota 1.20. attēlā.

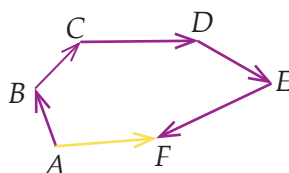


1.19. att.



1.20. att. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{s}$.

Praktiski izpildot vairāku vektoru saskaitīšanu, tos secīgi atliek vienu otram galā, nemeklējot starpsomas vektorus. Summas vektoru iegūst, savienojot pirmā vektora sākumpunktu un pēdējā vektora galapunktu.



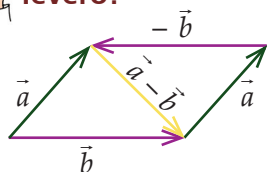
1.21. att.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF}$$

Vektoru atņemšana



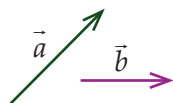
levēro!



Par divu **vektoru** $\vec{a}$ un $\vec{b}$ **starpību** sauc tādu vektoru $\vec{c}$, pie kura pieskaitot vektoru $\vec{b}$ iegūst vektoru $\vec{a}$, tātad $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$, ja $\vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$.

Praktiski, vektoru atņemšanu ērtāk aizstāt ar pretēja vektora pieskaitīšanu. Proti, $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

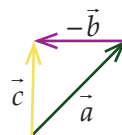
Vektoru $\vec{a}$ un $\vec{b}$ starpības vektora $\vec{c}$ iegūšanas ceļš parādīts 1.22.–1.24. attēlos.



1.22. att.
Dotie
vektori



1.23. att.
Vektora $\vec{b}$
pretējais vektors



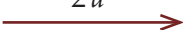
1.24. att. Izmantojot vektoru saskaitīšanas trijstūra likumu: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{c}$

Vektora reizināšana ar skaitli

Par vektora $\vec{a}$ **reizinājumu ar skaitli** k ($k \neq 0$) sauc vektoru $\vec{b}$, kura garums $|\vec{b}|$ vienāds ar $k \cdot |\vec{a}|$, pie tam

- vektori $\vec{a}$ un $\vec{b}$ ir **vienādi vērsti**, ja $k > 0$,
- vektori $\vec{a}$ un $\vec{b}$ ir **pretēji vērsti**, ja $k < 0$.

Vektora reizinājumu ar skaitli apzīmē: $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$.

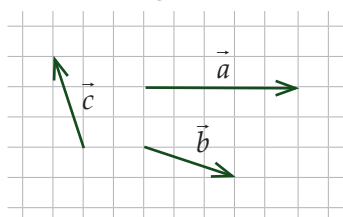
Vektors $\vec{a}$	Skaitlis k	$k \cdot \vec{a}$
	$k = 2$	$2\vec{a}$ 
	$k = -3$	$-3\vec{a}$ 
	$k = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\vec{a}$ 

Ja kādu vektoru reizina ar 0, vienmēr iegūst $\vec{0}$.

Ja nullvektoru reizina ar kādu skaitli, arī iegūst $\vec{0}$.

Uzdevumi

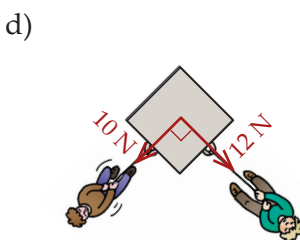
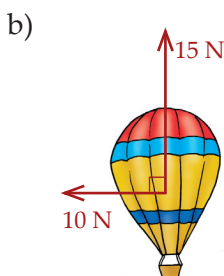
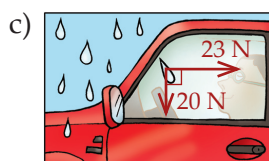
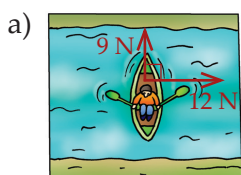
1.8. Konstruē 1.25. attēlā doto vektoru saskaitīšanas, atņemšanas vai reizināšanas rezultātā iegūto vektoru.



1.25. att.

- | | | |
|----------------------------------|-------------------------|-------------------------------------|
| a) $\vec{a} + \vec{b}$ | e) $\vec{a} - \vec{c}$ | i) $\frac{1}{2} \cdot \vec{c}$ |
| b) $\vec{a} + \vec{c} + \vec{b}$ | f) $\vec{c} - \vec{b}$ | j) $-2 \vec{b}$ |
| c) $2\vec{a}$ | g) $2\vec{a} - \vec{c}$ | k) $\frac{3}{5} \vec{a} + 2\vec{c}$ |
| d) $-\vec{c}$ | h) $0 \cdot \vec{c}$ | l) $\frac{1}{2} \vec{c} - 2\vec{b}$ |

1.9. Attēlos parādīts, kā uz dažādiem ķermeņiem darbojas dažādi spēki. Nosaki katram ķermenim pieliktā kopspēka virzienu un tā lielumu.

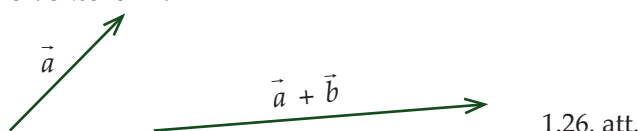


Zini!
N(ūtons)— spēka vienība.
Ja ķermeņa masa ir 1 kg, tad 1 N liels spēks tam piešķir paātrinājumu $1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$,
 $1 \text{ N} = \frac{1 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m}}{1 \text{ s}^2}$.

1.10. Uzzīmē divus vektorus $\vec{a}$ un $\vec{b}$. Uzzīmē vektorus $\vec{a} + \vec{b}$, $2 \cdot (\vec{a} + \vec{b})$, $2\vec{a} + 2\vec{b}$. Ko vari secināt?

1.11. Uzziņu literatūrā atrodi komutatīvās un asociatīvās īpašību formulējumus. Vai vektoru saskaitīšanai ir spēkā:
a) komutatīvā īpašība; b) asociatīvā īpašība?

- 1.12. Uzzīmē vektoru $\vec{a}$ un summas vektoru $\vec{a} + \vec{b}$, izmantojot 1.26. attēlā dotos vektorus. Uzzīmē vektoru $\vec{b}$.

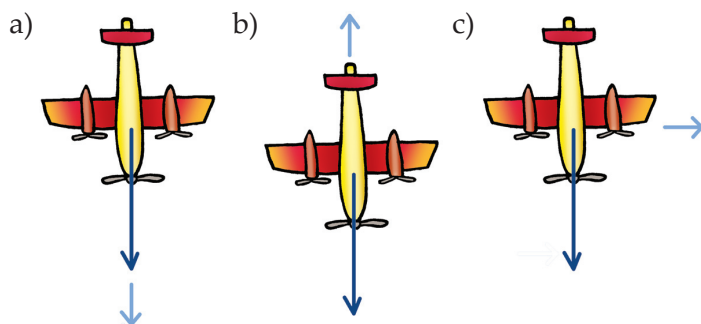


1.26. att.

- 1.13. Uzzīmē divus vektorus. Pieņem, ka viens no tiem ir $2\vec{a}$, bet otrs ir $\vec{a} + \vec{b}$. Konstruē vektoru $\vec{b}$.
- 1.14. Uzskicē vektoru $\vec{v}$. Pieņemsim, ka tas ir ātrums, kura modulis ir $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.
- Uzskicē vektoru $2\vec{v}$. Ko izsaka šis vektors?
 - Uzskicē vektoru $-\vec{v}$. Ko izsaka šis vektors?
- 1.15. Doti punkti A un B . Apraksti punkta P atrašanās vietu, ja $\overrightarrow{AP} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ ($k \neq 0$). (Ieteicams apskatīt četrus gadījumus: $k < 0$; $0 < k < 1$; $k = 1$; $k > 1$).
- 1.16. Futbola spēles laikā bumbu vienlaicīgi spēra divi spēlētāji, kuri atradās bumbas pretējās pusēs. Kurā no gadījumiem bumbai tiks pielikts lielāks kopīgais spēks? Pamato atbildi.



- 1.17. Lidoja trīs lidmašīnas. Pirmā lido ar ceļavēju, otrā lido pret vēju, bet uz trešo lidmašīnu pūš sānvējš (skat. a), b), c)). Vēja stiprums un lidmašīnas ātrums visos gadījumos ir vienāds. Uzskicē aptuvenu katras lidmašīnas lidojuma trajektoriju un nosaki, kura no lidmašīnām galamērķi sasniegs pirmā.



Latīņu valodā 'navigatio' — kuģošana. Tā ir arī zinātne par kustīgu objektu vadīšanu.

Trajektorija — optimālais maršruts.

Kurss — virziens, kādā lidotu lidmašīna vai pārvietotos kuģis, ja nebūtu vēja vai straumes.

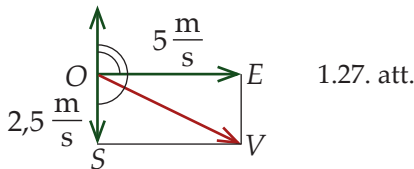
- 1.18. Peldētājs 100 metrus baseinā nopeld 50 sekundēs. Cik ilgi peldētājs 100 m peldēs pa upi, kuras straumes ātrums ir $1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, ja viņš peld
- pa straumi,
 - pret straumi?
- 1.19. Lidmašīnas ātrums ir $480 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Cik ilgi lidmašīna lidos 940 km, ja pūš $10 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ liels pretvējš?

 Aprēķinus veikt ar precizitāti līdz desmitdaļām!

Motorlaivas vidējais ātrums stāvošā ūdenī ir $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, tās kurss ir austrumu virzienā. Straume tek ar vidējo ātrumu $2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, dienvidu virzienā.

- Cik liels ir motorlaivas rezultējošais ātrums, un kāds ir tā virziens?
- Cik ilgā laikā motorlaiva šķērsos upi, ja upes platums ir 80 m?
- Par cik metriem no izbraukšanas punkta būs pārvietojusies motorlaiva, ja kustība notiek lejup pa straumi?

a) Kurss ir $\overline{OE}$ virzienā (skat. 1.27. att.), bet straumes virziens ir $\overline{OS}$ virzienā (skat. 1.27. att.).



Rezultējošā ātruma vektoru atrod pēc paralelograma likuma (1.26. att. OV). Rezultējošā ātruma lielums atbilst šī vektora garumam. Trijstūris EVO ir taisnleņķa trijstūris, tādēļ $\text{tg} \angle EOV = \frac{EV}{OE} = \frac{1}{2}$. Izmantojot kalkulatoru, nosakām leņķa EOV lielumu: $26,6^\circ$. Tātad laivas trajektorija ir $90^\circ + 26,6^\circ = 116,6^\circ$, salīdzinot ar ziemeļu virzienu. Izmantojot Pitagora teoremu, aprēķinām rezultējošā ātruma vektora garumu:

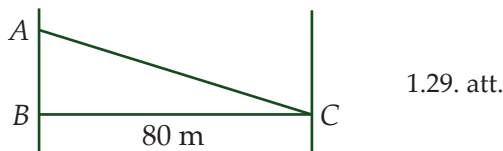
$$OV = \sqrt{5^2 + 2,5^2} = \sqrt{31,25} = 5,6 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right).$$



1.28. att.

Kompass ir navigācijas instruments Zemes debespūšu noteikšanai (no vācu val. 'kompaß', savukārt no itāļu val. 'compasso' cirkulis un 'compassare' mērīt soļiem). Grādus kompasā mēra, sākot no Ziemeļiem pulksteņrādītāja virzienā.

- Lai aprēķinātu laiku, kas nepieciešams upes šķērsošanai, izmanto trijstūru līdzību. Tā kā rezultējošā ātruma vektors nosaka, pa kādu trajektoriju laiva šķērsos upi, tad trijstūris OVS (skat. 1.27. att.), kura malas ir ātrumu vektoru garumi, ir līdzīgs trijstūrim ACB (skat. 1.29.att.), kura mala AC atbilst laivas pārvietojumam no viena upes krasta uz otru, bet mala BC atbilst upes platumam, pēc taisnleņķa trijstūru līdzības pazīmes ll, t. i., $\triangle ABC \sim \triangle OVS$.



1.29. att.

Tā kā $t = \frac{s}{v}$ (no ātruma aprēķināšanas formulas $v = \frac{s}{t}$), tad laiku t var aprēķināt, izdalot veikto ceļu AC ar rezultējošo ātrumu OV, t. i., $\frac{AC}{OV}$. Tā kā $\triangle ACB \sim \triangle OVS$, tad

$$\frac{AC}{OV} = \frac{BC}{SV} = \frac{80 \text{ m}}{5 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 16 \text{ s, jeb šo trijstūru līdzības koeficients atbilst laikam } t.$$

- Attālums $AB = 2,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 16 \text{ s} = 40 \text{ m}.$



Uzdevumi

1.20. Aprēķinus veic ar precizitāti līdz desmitdaļām.

Motorlaiva brauca ar vidējo ātrumu $6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ uz rietumiem, straumes vidējais ātrums ir $3,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ uz ziemeļiem.

- Nosaki motorlaivas rezultējošo ātrumu.
- Cik ilgi motorlaiva brauks no viena krasta līdz otram, ja upes platums ir 120 m?
- Par cik metriem no izbraukšanas punkta būs pārvietojusies motorlaiva, ja kustība notiek lejup pa straumi?

1.21. Aprēķinus veic ar precizitāti līdz desmitdaļām.

Airētājs stāvošā ūdenī airē ar vidējo ātrumu $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Upe ir 200 m plata, un straumes vidējais ātrums ir $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (skat. 1.30. att.).

- Cik tālu straume aiznestu laivu, ja airētu perpendikulāri krastam?
- Kādā virzienā jāairē laiva (jānosaka kurss), lai pretējā krastā tā nonāktu tieši pretī izbraukšanas punktam A (punktā B)? Cik liels būs rezultējošais ātrums un cik ilgā laikā airētājs sasniegs pretējo krastu?
- Kādā virzienā jāairē laiva (kurss), lai visātrāk nonāktu pretējā krastā?



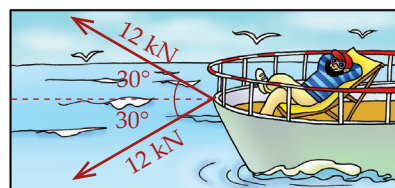
1.30. att.

Mezgli — ātruma mērvienība jūrā. 1 mezgls = 1 jūras jūdze (1,852 km) stundā jeb aptuveni $0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

1.22. Uzskicē atbilstošu zīmējumu un aprēķini leņķi starp kursu un trajektoriju.

- Kuteris brauc ar vidējo ātrumu 10 mezgli, tā kurss ir 30° attiecībā pret ziemeļu virzienu. Straumes virziens ir 120° attiecībā pret ziemeļu virzienu, bet kuterā rezultējošais ātrums ir 20 mezgli.
- Laivas trajektorija ar Ziemeļu virzienu veido 70° leņķi, tās rezultējošais ātrums ir 8 mezgli, straumes virziens ir 160° un tās ātrums ir 8 mezgli.

1.23. Vējš pūš dienvidrietumu virzienā. Lidmašīnai jālido uz ziemeļiem, lai no pilsētas A aizlidotu uz pilsētu B. Uzskicē pilsētas B iespējamo atrašanās vietu. Atpakaļceļā vēja ātrums un virziens nemainās, kā arī lidmašīnas ātrums ir tāds pats. Uzskicē, kāds kurss jānostāda, lai lidmašīna sasniegtu pilsētu A.

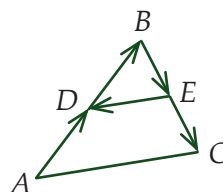


1.31. att.

1.24. Aprēķinus veic ar precizitāti līdz desmitdaļām. Divi velkoņi velk kuģi tā, kā parādīts 1.31. attēlā. Aprēķini velkoņu kopējo rezultējošo spēku.

1.25. Punkti D un E ir trijstūra ABC malu AB un BC viduspunkti. Aplūko 1.32. attēlu un uzraksti:

- kuri vektori ir vienādi;
- kuri vektori ir pretēji;
- kuri vektori ir vienādi vērsti ar vektoru AB.



1.32. att.

1.26. Vienādsānu trapecē $ABCD$ ($AB = CD$) novilkta diagonāle, kas krustojas punktā O . Atzīmē vektorus $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{OD}$. Izraksti no dotajiem vektoriem tos vektorus, kas ir

- a) vienādi vērsti vektori, c) pretēji vektori,
b) pretēji vērsti vektori, d) vienāda garuma vektori.

1.27. Uzzīmē trijstūrī DEF . Uzzīmē doto vektoru summas vektoru.

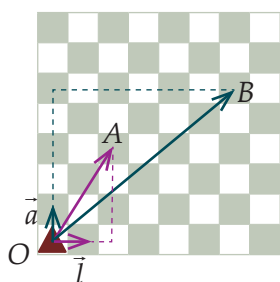
- a) $\overrightarrow{DF}$ un $\overrightarrow{FE}$ b) $\overrightarrow{DE}$ un $\overrightarrow{FE}$ c) $\overrightarrow{DF}$ un $\overrightarrow{DE}$ d) $\overrightarrow{FD}$ un $\overrightarrow{FE}$

1.28. Trijstūrī ABC malas $AB = 5$ un $BC = 12$, $\sphericalangle B = 90^\circ$. Aprēķini:

- a) $|\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{BA}|$; c) $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|$; e) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|$; g) $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}|$;
b) $|\overrightarrow{BC}| - |\overrightarrow{BA}|$; d) $|\overrightarrow{AB}| - |\overrightarrow{BC}|$; f) $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}|$; h) $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}|$.

Vektora izteikšana ar dotiem vektoriem

Aplūkosim šaha galdiņu un figūru, kas novietota galdiņa kreisajā apakšējā stūrī (skat. 1.33. att.). Pieņemsim, ka vienā gājienā figūra var pārvietoties vai nu vienu rūtiņu uz augšu, vai vienu rūtiņu pa labi.



1.33. att.
 $\uparrow$ $\vec{a}$ – gājiens uz augšu
 $\rightarrow$ $\vec{l}$ – gājiens pa labi
 $\overrightarrow{OA} = 2\vec{l} + 3\vec{a}$
 $\overrightarrow{OB} = 5\vec{a} + 6\vec{l}$



1.34. att.

Izsaki attēlā redzamā šaha zirdziņa vienu gājienu, izmantojot vektorus $\vec{a}$ un $\vec{l}$.

Lai no sākumpunkta nokļūtu punktā A , figūra tiek pārvietota 2 lauciņus pa labi un 3 — uz augšu, savukārt, lai nokļūtu punktā B , figūru pārbīda 5 lauciņus uz augšu un 6 — pa labi. Ja vienu figūras pārvietošanu uz augšu apzīmējam ar vektoru $\vec{a}$, bet pārvietošanu pa labi ar vektoru $\vec{l}$, tad šajā spēlē katru figūras kopējo pārvietošanu (vektoru) var izteikt, izmantojot šos divus vektorus.

Ja plaknē doti divi vektori $\vec{a}$ un $\vec{b}$, kas neatrodas uz paralēlām taisnēm, tad katru citu šīs plaknes vektoru $\vec{c}$ var izteikt ar dotajiem vektoriem $\vec{a}$ un $\vec{b}$, t. i., vektoru $\vec{c}$ iespējams uzrakstīt formā

$$\vec{c} = m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{b}, \text{ kur } m, n \in \mathbb{R}.$$

Vektoru izteikšanā izmanto vektoru saskaitīšanas, atņemšanas, kā arī reizināšanas ar skaitli likumus.



Ievēro!

Lai izteiktu kādu vektoru, tā ceļš no sākumpunkta līdz galapunktam “jāapraksta” ar nosacījumos dotajiem vektoriem.

Lai **izteiktu, piemēram, vektoru $\overrightarrow{AB}$ ar vektoriem $\vec{a}$ un $\vec{b}$** , ērti izmantot doto risināšanas secību.

1) Apraksta ceļu no A uz B, kā atsevišķu vektoru summu:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{n}_1 + \vec{n}_2 + \dots + \vec{n}_k$$

2) Novērtē katru no summas vektoriem $\vec{n}_i$ attiecībā uz dotajiem vektoriem $\vec{a}$ un $\vec{b}$, atbildot uz jautājumiem:

- vai $\vec{n}_i$ vērsums sakrīt ar doto vektoru vērsumu?
- vai $\vec{n}_i$ ir daļa no dotajiem, vai to daudzkārtņis?
- vai $\vec{n}_i$ (vai tā daļu) var izteikt kā doto vektoru summu vai starpību?

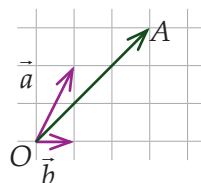
3) $\overrightarrow{AB} = \vec{n}_1 + \vec{n}_2 + \dots + \vec{n}_k$ summā $\vec{n}_i$ aizstāj ar iegūtajām izteiksmēm.



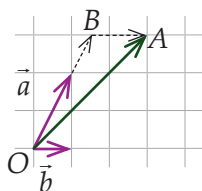
Piemēri

1. Izteikt vektoru $\overrightarrow{OA}$ ar vektoriem $\vec{a}$ un $\vec{b}$.

1) Apraksta ceļu no A uz O.

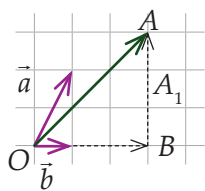


1. risināšanas veids

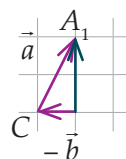


$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}$$

2. risināšanas veids



$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}$$



2) Novērtē katru no summas vektoriem $\overrightarrow{OB}$ un $\overrightarrow{BA}$ attiecībā uz vektoriem $\vec{a}$ un $\vec{b}$.

$\overrightarrow{OB}$ vērsums sakrīt ar $\vec{b}$ vērsumu un $\overrightarrow{OB}$ ir 1,5 reizes garāks par $\vec{a}$, tāpēc $\overrightarrow{OB} = 1,5 \cdot \vec{a}$.

$\overrightarrow{BA}$ vērsums sakrīt ar $\vec{b}$.

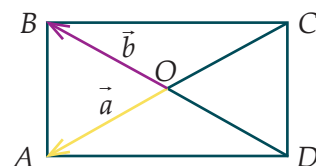
$\overrightarrow{OB}$ vērsums sakrīt ar $\vec{b}$ vērsumu un $\overrightarrow{OB}$ ir 3 reizes garāks par $\vec{b}$, tāpēc $\overrightarrow{OB} = 3 \cdot \vec{b}$. $\overrightarrow{BA}$ vērsums nesakrīt ne ar vektora $\vec{a}$, ne ar vektora $\vec{b}$ vērsumu. Apskatīsim daļu no vektora $\overrightarrow{BA}$ — vektoru $\overrightarrow{BA_1}$. Vektors $\overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$. $\overrightarrow{BC}$ ir $\vec{b}$ pretējs vektors $\overrightarrow{BC} = -\vec{b}$, bet $\overrightarrow{BA_1}$ sakrīt ar vektoru $\vec{a}$, tad $\overrightarrow{BA_1} = -\vec{b} + \vec{a}$. $\overrightarrow{BA} = 1,5\overrightarrow{BA_1} = 1,5(-\vec{b} + \vec{a})$.

3) Summā $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA}$ vektorus $\overrightarrow{OB}$ un $\overrightarrow{BA}$ aizstāj ar iegūtajām izteiksmēm.

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = 1,5\vec{a} + 1,5\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = 3\vec{b} + 1,5(-\vec{b} + \vec{a}) = 1,5\vec{b} + 1,5\vec{a}$$

2. Dots taisnstūris $ABCD$ (skat. 1.35. att.), kurā novilk-
tas diagonāles, kas krustojas punktā O , un vektori
 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ un $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.



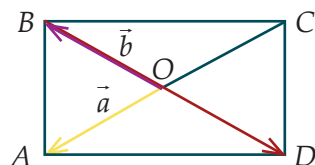
1.35. att.

Izteikt prasītos vektorus ar vektoriem $\vec{a}$ un $\vec{b}$:

- a) $\overrightarrow{BD}$; b) $\overrightarrow{AB}$; c) $\overrightarrow{CE}$, kur $E \in AD$ un sadala to attiecībā $AE:ED = 3:2$.

- a) Izsaka $\overrightarrow{BD}$.

Pēc taisnstūra īpašībām $DB = 2OB$. Tā kā vektoriem $\overrightarrow{BD}$
un $\overrightarrow{OB}$ vērsumi ir pretēji, iegūst: $\overrightarrow{BD} = -2\vec{b}$.

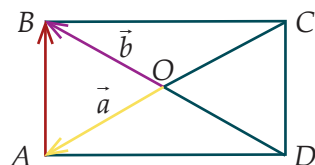


- b) Izsaka $\overrightarrow{AB}$.

"Apraksta" ceļu no A uz B: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$.

Tā kā $\overrightarrow{AO} = -\vec{a}$ un $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, tad

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}.$$



- c) Izsaka $\overrightarrow{CE}$.

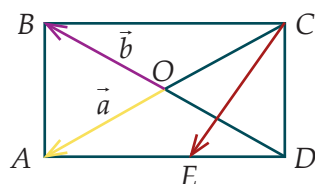
Ceļu no C uz E var "aprakstīt" vairākos veidos. Apska-
tīsim vienu no tiem: $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE}$. $\overrightarrow{CA} = 2\vec{a}$ (skat. a)
piemēru). Ja $AE:ED = 3:2$, tad $AE = \frac{3}{5}AD$.

Izsaka $\overrightarrow{AD}$.

"Apraksta" ceļu no A uz D: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = -\vec{a} - \vec{b}$

Tad $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AD} = \frac{3}{5}(-\vec{a} - \vec{b})$. Līdz ar to,

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} = 2\vec{a} + \frac{3}{5}(-\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a} - \frac{3}{5}\vec{a} - \frac{3}{5}\vec{b} = 1\frac{2}{5}\vec{a} - \frac{3}{5}\vec{b}.$$



Uzdevumi

- 1.29.** No punkta O atlikti vektori $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$. Izsaki prasītos
vektorus ar vektoriem $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ un $\vec{d}$:

- a) $\overrightarrow{AB}$; b) $\overrightarrow{BC}$; c) $\overrightarrow{CD}$; d) $\overrightarrow{BA}$; e) $\overrightarrow{AD}$; f) $\overrightarrow{DO}$; g) $\overrightarrow{DB}$; h) $\overrightarrow{AC}$;

i) vienkāršo izteiksmi $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$;

j) ja punkts E ir nogriežņa BC viduspunkts, izsaki vektorus $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{OE}$.

- 1.30.** Dots paralelograms $ABCD$, O — tā diagonāļu krustpunkts. Pārbaudi, vai dotie
apgalvojumi ir patiesi.

a) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD}$

d) $|\overrightarrow{AO}| = |\overrightarrow{OC}|$

g) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AC}$

e) $|\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{BA}| = |\overrightarrow{BD}|$

h) $\overrightarrow{AO} = 0,5 \cdot \overrightarrow{AC}$

c) $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$

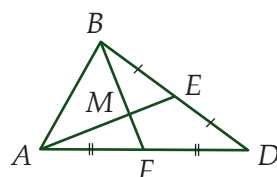
f) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC}$

i) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

1.31. Trijstūrī ABC punkts D atrodas uz malas AB un $DB=2AD$. Punkts E atrodas uz trijstūra malas AC un $EC=2AE$. $\overrightarrow{AD} = \vec{x}$ un $\overrightarrow{AE} = \vec{y}$. Izsaki prasītos vektorus ar vektoriem $\vec{x}$ un $\vec{y}$:

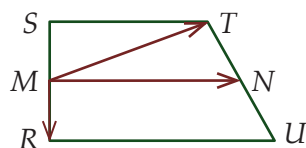
- a) $\overrightarrow{AB}$; b) $\overrightarrow{CA}$; c) $\overrightarrow{DE}$; d) $\overrightarrow{BC}$.

1.32. Trijstūra mediānu krustpunkts ir punkts M . Izsaki $\overrightarrow{AM}$ ar $\overrightarrow{AE}$ un $\overrightarrow{BF}$ ar $\overrightarrow{FM}$ (skat. 1.36. att.). Kādas vienādības vēl var uzrakstīt?



1.36. att.

1.33. Četrstūris $RSTU$ ir taisnleņķa trapece, MN — tās viduslīnija. $\overrightarrow{MR} = \vec{a}$, $\overrightarrow{MT} = \vec{b}$ un $\overrightarrow{MN} = \vec{c}$ (skat. 1.37. att.). Izsaki prasītos vektorus ar vektoriem $\vec{a}$, $\vec{b}$ un $\vec{c}$:



1.37. att.

- a) $\overrightarrow{RS}$; b) $\overrightarrow{ST}$; c) $\overrightarrow{TN}$; d) $\overrightarrow{RU}$; e) $\overrightarrow{US}$!

Vektora projekcija



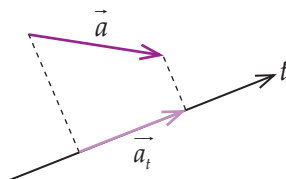
1.38. att.

Aplūkosim situāciju, kad aiz auklas tiek vilktas ragaviņas (skat. 1.38. att.). Skaidrs, ka vilkšanas spēks tiek pielikts auklas virzienā, taču ragaviņas, kurās kāds sēd, slīd uz priekšu pa zemi. Ja būtu zināms vilcējspēka lielums un arī leņķis, ko tas veido ar zemei paralēlu taisni, varētu aprēķināt **vektora projekciju** — lielumu, kas raksturo ragaviņu kustību uz priekšu.

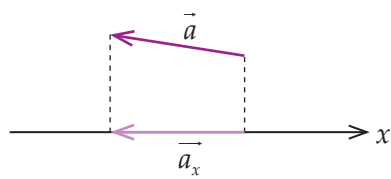
Fizikā apskata divus atšķirīgus jēdzienus — **vektora ģeometriskā projekcija** un **vektora projekcija**.

Vektora ģeometriskā projekcija ir vektors, kuru iegūst, no vektora galapunktiem pret apskatāmo taisni velkot perpendikulus. Vektora galapunkta projekcija atbilst ģeometriskās projekcijas galapunktam, vektora sākumpunkta projekcija atbilst ģeometriskās projekcijas sākumpunktam.

Projekcija — (no latīņu valodas ‘*proiectio*’ — mešana uz priekšu) — kāda priekšmeta attēls uz plaknes.



1.39. att. Vektora $\vec{a}$ ģeometriskā projekcija ir vektors $\vec{a}_t$.



1.40. att. Vektora $\vec{a}$ ģeometriskā projekcija ir vektors $\vec{a}_x$.

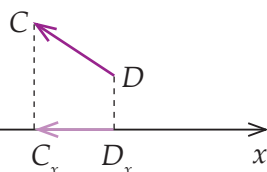
Ievēro: x ass vietā var būt izmantota jebkura cita ass, piemēram, y ass.

Vektora $\vec{a}$ projekcija uz x ass ir skaitlis, kurš

- vienāds ar vektora ģeometriskās projekcijas $\vec{a}_x$ garumu $|\vec{a}_x|$, ja ģeometriskās projekcijas un x ass vērsumi sakrīt,
- ir pretējs skaitlis ģeometriskās projekcijas $\vec{a}_x$ garumam $|\vec{a}_x|$, ja ģeometriskās projekcijas un x ass vērsumi ir pretēji.



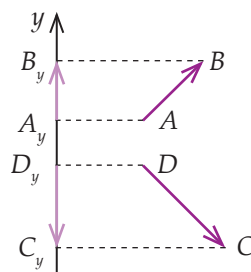
1.42. att. Vektora $\vec{AB}$, projekcija ir $|\vec{A_xB_x}|$, jo ģeometriskās projekcijas un x ass vērsumi sakrīt.



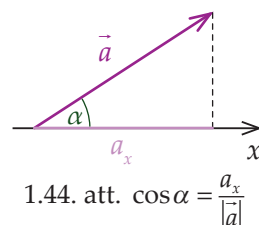
1.43. att. Vektora $\vec{DC}$ projekcija ir $-|\vec{D_xC_x}|$, jo ģeometriskās projekcijas un x ass vērsumi pretēji.

Ja zināms vektora $\vec{a}$ garums $|\vec{a}|$ un leņķis α , ko vektors veido ar x ass pozitīvo virzienu, tad var aprēķināt **vektora projekcijas garumu**, izmantojot formulu

$$a_x = |\vec{a}| \cdot \cos \alpha.$$



1.41. att. Vektora $\vec{AB}$ projekcija ir $|\vec{A_yB_y}|$ vektora $\vec{DC}$ projekcija ir $-|\vec{D_yC_y}|$.

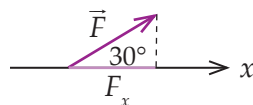


1.44. att. $\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}$

Piemērs 

Renārs, velkot rotaļu automašīnu aiz saites, kas vērsta 30° leņķī pret horizontu, pieliek saitei 8 N lielu spēku. Cik liela ir horizontālā vilcējspēka projekcija?

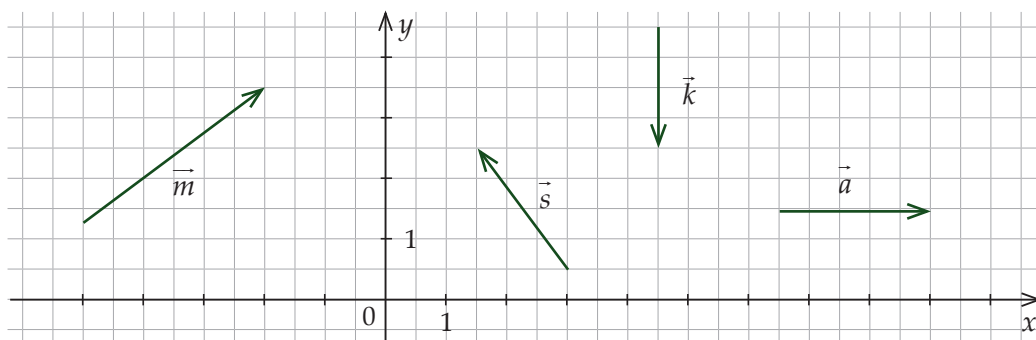
Ja $|\vec{F}| = 8 \text{ N}$, tad $F_x = |\vec{F}| \cdot \cos 30^\circ = 8 \text{ N} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \text{ N}$.



1.45. att.

Uzdevumi 

- 1.34.** Uzzīmē (skat. 1.46. att.): a) vektoru ģeometriskā projekciju uz x un y asīm;
b) vektoru ģeometriskā projekciju uz taisnes $y = x$.



1.46. att.

1.35. Aprēķini 1.47. attēlā doto vektoru projekcijas uz x un y asīm.

1.36. Kādā gadījumā:

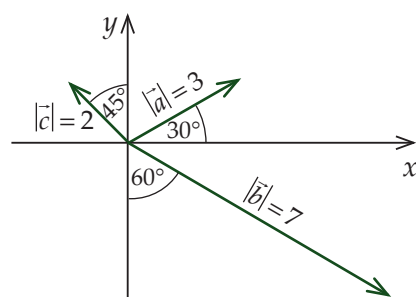
- vektora projekcija uz ass ir vienāda ar nulli;
- vektora projekcijas modulis uz ass ir vienāds ar vektora garumu?

1.37. Lidmašīnas ātrums ir $700 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ un tās nospraustais kurss ir 60° attiecībā pret ziemeļu virzienu. Aprēķini ātruma vektora projekcijas uz x un y asīm (y ass sakrīt ar ziemeļu virzienu).

1.38. Ragaviņas, kurās sēž bērns, velk aiz auklas, kas veido 60° lielu leņķi ar zemi.

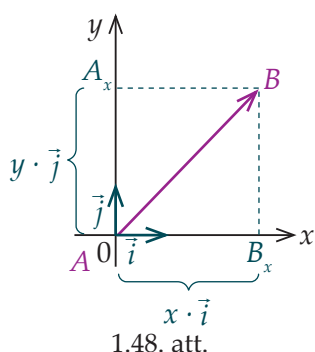
- Aprēķini horizontālo un vertikālo vilcējspēka projekciju, ja ragaviņas tiek vilktas ar 40 N lielu spēku.
- Ja vilcējspēku pieliktu 30° leņķī attiecībā pret horizontu, ragaviņas vilktos vieglāk. Pamato savu atbildi.

1.39. Kā jānovieto projekciju ass, lai divu dažādu vektoru projekcijas uz tās būtu vienādas?

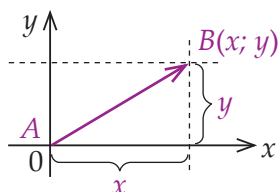


1.47. att.

Vektora koordinātas



1.48. att.



1.49. att. Vektora garuma aprēķināšanas formulu, ja dotas tā koordinātas, iegūst, izmantojot Pitagora teorēmu.

Novietosim vektoru $\overrightarrow{AB}$ koordinātu plaknē tā, lai tā sākumpunkts A sakrīt ar koordinātu plaknes sākumpunktu O (skat. 1.48. att.). Uz Ox ass atliksim vektoru $\vec{i}$, kurš ir 1 vienību garš, bet uz ass Oy atliksim 1 vienību garu vektoru $\vec{j}$.

Tā kā katru plaknes vektoru var izteikt ar diviem citiem vektoriem, kas nav paralēli, tad arī vektoru $\overrightarrow{AB}$ var izteikt ar vektoriem $\vec{i}$ un $\vec{j}$.

Pēc paralelograma likuma $\overrightarrow{AB} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Šādi izteikta vektora koeficientus x un y sauc par **vektora $\overrightarrow{AB}$ koordinātām**.

Vektoru, kas **uzdots koordinātu formā** pieraksta: $\overrightarrow{AB} = (x; y)$. Zinot, ka vektora sākumpunkts A sakrīt ar koordinātu plaknes sākumpunktu, vektora koordinātas atbilst tā galapunkta B koordinātām (skat. 1.49. att.).

Zinot vektora koordinātas, var aprēķināt tā garumu.

Ja dots vektors $\overrightarrow{AB} = (x; y)$, tad tā **moduli (garumu) aprēķina** pēc formulas $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.



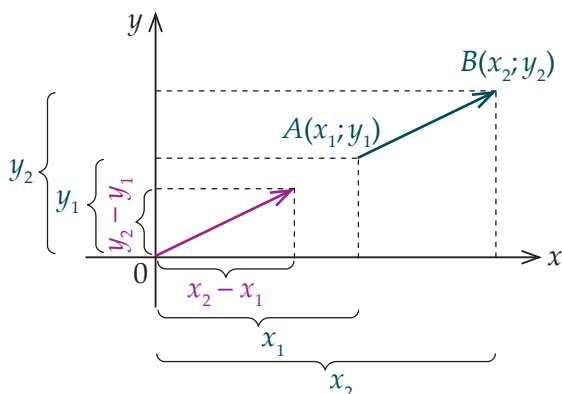
Piemērs

Aprēķināt vektora $\vec{a} = (6; 8)$ garumu.

Vektora $\vec{a} = (6; 8)$ garums jeb modulis ir $|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

Vektora koordinātas var aprēķināt arī tad, ja tā galapunktu koordinātas neatrodas koordinātu plaknes sācumpunktā.

Ja vektora sācumpunkts un galapunkts ir punkti ar koordinātām $A(x_1; y_1)$ un $B(x_2; y_2)$, tad vektora $\overline{AB}$ koordinātas ir $(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$.



1.50. att.
Izmantojot zīmējumu, pamato vektora $\overline{AB}$ koordinātu aprēķināšanas formulu.

Formulu viegli iegūt, ja vektoru $\overline{AB}$ novieto uz tam paralēlas taisnes, kas novilkta caur koordinātu sācumpunktu, tā, lai tā sācumpunkts sakrīt ar koordinātu plaknes sācumpunktu.



Ievēro!

Vektoru $\overline{AB}$ un $\overline{BA}$ koordinātas ir pretēji skaitļi.

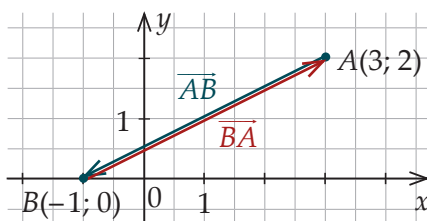


Piemērs

Doti punkti $A(3; 2)$ un $B(-1; 0)$.
Aprēķināt vektoru $\overline{AB}$ un $\overline{BA}$ koordinātas (skat. 1.51. att.).

$\overline{AB} = (-1 - 3; 0 - 2) = (-4; -2)$, bet

$\overline{BA} = (3 - (-1); 2 - 0) = (4; 2)$.



1.51. att.

Darbības ar vektoriem koordinātu formā

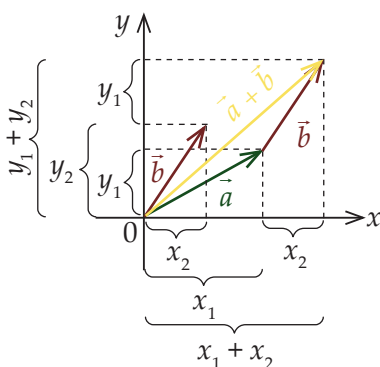
Ja vektori doti koordinātu formā, tad tos var gan saskaitīt, gan atņemt, gan reizināt ar skaitli. To dara, ievērojot šādus likumus:

Ja doti vektori $\vec{a} = (x_1; y_1)$ un $\vec{b} = (x_2; y_2)$, tad

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$$

$$k \cdot \vec{a} = (k \cdot x_1; k \cdot y_1)$$



1.52. att.

Izmantojot 1.52. attēlu, pamato formulu:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)!$$



Piemērs

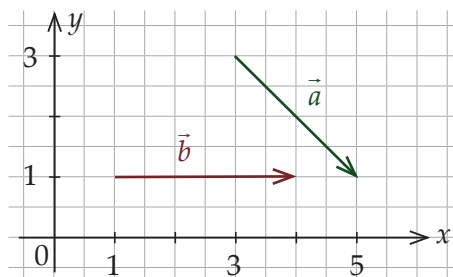
1.53. attēlā doti vektori $\vec{a} = (2; -2)$ un $\vec{b} = (3; 0)$ un skaitļi $k = 3$ un $m = -0,75$. Aprēķināt vektoru $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} - \vec{a}$, $k \cdot \vec{a}$ un $m \cdot \vec{b}$ koordinātas.

$$1) \vec{a} + \vec{b} = (2 + 3; -2 + 0) = (5; -2)$$

$$2) \vec{b} - \vec{a} = (3 - 2; 0 - (-2)) = (1; 2)$$

$$3) k \cdot \vec{a} = (3 \cdot 2; 3 \cdot (-2)) = (6; -6)$$

$$4) m \cdot \vec{b} = (-0,75 \cdot 3; -0,75 \cdot 0) = (-2,25; 0)$$



1.53. att.



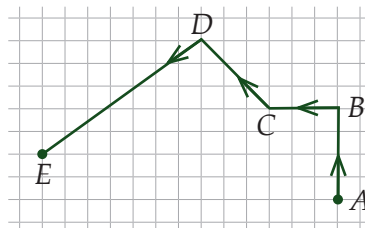
Uzdevumi

1.40. Koordinātu plaknē atliec dotos vektorus:

- a) vektoru $\overrightarrow{AB}$, ja $A(4; 5)$, $B(-1; 2)$;
- b) vektoru $\vec{c} = (2; -3)$;
- c) vektoram $\vec{c}$ vienādi vērstu vektoru;
- d) vektoram $\overrightarrow{AB}$ pretēju vektoru.

1.41. Automašīna brauc no punkta A uz E caur punktiem B, C, D (skat. 1.54. att.).

- a) Izsaki koordinātu formā vektorus $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ un $\overrightarrow{DE}$.
- b) Izsaki koordinātu formā vektoru $\overrightarrow{AE}$.
- c) Aprēķini koordinātu formā vektoru summu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$. Salīdzini iegūto summas vektoru ar vektoru $\overrightarrow{AE}$.



1.54. att.

1.42. Dots, ka $\vec{a} = (2; 4)$, $\vec{b} = (3; 6)$, $\vec{c} = (6; 12)$ un $\vec{d} = (1; 3)$. Aprēķini skaitļus k , m un n , ja tas ir iespējams.

- a) $\vec{c} = k\vec{a}$
- b) $\vec{c} = m\vec{b}$
- c) $\vec{a} = n\vec{d}$

Konstruē dotos vektorus. Ko var secināt?

1.43. Zināms, ka:

- a) $\overrightarrow{AB} = (3; 2)$ un $A(4; 0)$. Nosaki punkta B koordinātas.
- b) $\overrightarrow{CD} = (0; -2)$ un $D(4; 5)$. Nosaki punkta C koordinātas. Uzzīmē šos vektorus.

1.44. Dots vektors $\overrightarrow{CD} = (-2; -4)$ un vektors $\overrightarrow{AB}$, kuram $A(-1; -3)$ un $B(-1; 2)$. Uzzīmē šos vektorus.

- a) aprēķini abu vektoru moduļus;
- b) aprēķini punkta E koordinātas, ja vektori $\overrightarrow{EF}$ un $\overrightarrow{CD}$ ir vienādi un punkta F koordinātas ir $(4; 5)$;
- c) izmantojot zīmējumu nosaki abu vektoru viduspunkta koordinātas. Izvirzi hipotēzi kā var aprēķināt vektora viduspunkta koordinātas.

1.45. Dots $\vec{v} = (1; 2)$ un $\vec{u} = (3; 0)$. Aprēķini:

- a) $3\vec{v}$; b) $\vec{v} + \vec{u}$; c) $\vec{v} - \vec{u}$; d) $2\vec{v} + 3\vec{u}$.

1.46. Doti punkti $K(2; 1)$, $L(8; 1)$ un $M(6; 4)$. Aprēķini vektoru $\overline{KL}$, $\overline{KM}$, $\overline{LM}$, $\overline{MK}$ garumus.

1.47. Doti punkti $A(4; 0)$, $B(5; 4)$, $C(-3; 1)$ un $D(1; -3)$. Nosaki:

- a) vektoru $\overline{AB}$ un $\overline{CD}$ koordinātas;
b) $|\overline{AB}|$ un $|\overline{CD}|$;
c) $\frac{1}{4} \cdot \overline{AB}$;
d) tāda punkta K koordinātas, kurš sadala nogriežni AB attiecībā 1:3, skaitot no punkta A .

1.48. $PQRS$ ir taisnstūris, kuram $PQ = 4$ cm, $QR = 3$ cm. Aprēķini vai izsaki:

- a) $\overline{PQ} + \overline{QR}$ b) $|\overline{PQ} + \overline{QR}|$ c) $\overline{PQ} + \overline{RS}$

1.49. Punkti $A(2; 3)$, $B(4; -1)$ un $C(2; 8)$ ir trijstūra virsotnes. X ir nogriežņa AB viduspunkts, bet Y ir nogriežņa BC viduspunkts. Uz taisnes XY atlikts punkts T tā, lai $XY = YT$. Aprēķini punkta T koordinātas. Nosaki un pamato figūras $XBTC$ veidu.

1.50. Doti vektori $\vec{a} = (2; 4)$ un $\overline{CD}$, kur $C(1; 1)$ un $D(-2; -2)$. Uzzīmē vektoru ģeometriskās projekcijas un nosaki to projekcijas uz asīm.

1.51. Vektora $\vec{a}$ ģeometriskās projekcijas uz asīm ir vektori $\vec{c} = (4; 0)$ un $\vec{d} = (0; -2)$. Uzzīmē vektoru $\vec{a}$ un nosaki tā koordinātas.

Uzdevumi par nodaļu

1.52. No punkta O atlikti divi vektori: $\overline{OA} = \vec{a}$ un $\overline{OB} = \vec{b}$. Punkts M ir nogriežņa AB viduspunkts, bet N ir nogriežņa OB viduspunkts.

- a) Uzzīmē aprakstam atbilstošu zīmējumu.
b) Izskati vektorus $\overline{AB}$, $\overline{AM}$, $\overline{OM}$, $\overline{ON}$ un $\overline{AN}$ ar vektoriem $\vec{a}$ un $\vec{b}$.
c) Punkts H atrodas uz nogriežņa AN un $AH = \frac{2}{3} AN$. Izskati vektoru $\overline{OH}$ ar vektoriem $\vec{a}$ un $\vec{b}$.
d) punkts P ir nogriežņa OA viduspunkts. Pierādi, ka punkti B , H , P atrodas uz vienas taisnes.

1.53.  Aprēķinus veic ar precizitāti līdz veseliem grādiem.

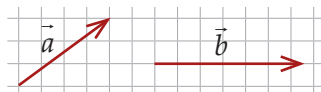
Sākot ceļojumu no ostas, kuģis virzienā uz rietumiem nobrauca 200 km un pēc tam vēl 240 km virzienā uz dienvidiem. Tad tas salūza. Uzzīmē virzienu, izmantojot vektorus. Uzzīmē virzienu, kādā jādodas glābējiem no ostas, lai pēc iespējas ātrāk nokļūtu pie kuģa un nosaki leņķi starp to un rietumu virzienu.

- 1.54.** Doti punkti $A(1; 3)$ un $B(4; 2)$. Kādas ir punkta D koordinātas, ja vektoru $\overrightarrow{CD}$ iegūst no punkta $C(-2; 3)$ atliekot vektoru $3\overrightarrow{AB}$. Kāds ir iegūtās figūras $ABDC$ veids? Atbilde pamato.
- 1.55.** Vektors $\vec{p}$ ir perpendikulārs vektoram $\vec{p} + \vec{q}$. Dots, ka $|\vec{p}| = 5$ un $|\vec{q}| = 13$. Aprēķini $|\vec{p} + \vec{q}|$.
- 1.56.** Uzzīmē $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OC} = 5\vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OD} = 5\vec{b}$, $A \in OC$, $B \in OD$. Izsaki $\overrightarrow{DC}$ ar $\overrightarrow{BA}$.
- 1.57.** Peldētājs startēja no viena upes krasta un peldēja tai pāri virzienā uz dienvidiem ar ātrumu $2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Upe ir 200 m plata un tek uz austrumiem ar ātrumu $1 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.
- Attēlo peldētāja pārvietojumu, izmantojot vektorus.
 - Aprēķini peldētāja rezultējošo ātrumu.
 - Cik ilgā laikā viņš pārpeldēs upi? Cik tālu uz austrumiem no starta vietas viņš būs aizpeldējis?
- 1.58.** Laura un Laila lūdz izšķirt viņu strīdu. Viņas, saskaitot divus spēka vektorus, kuru lielumi ir 4 N un 3 N, ieguvušas dažādus rezultējošos spēkus. Lauras atbilde ir 7 N, bet Lailas atbilde 5 N. Kurai meitenei ir taisnība? Pamato savu atbildi.
- 1.59.** Dots: $A(0; 4)$ un $B(6; 1)$. Punkts P sadala nogriezni AB attiecībā 2:1, skaitot no punkta A . Nosaki punkta P koordinātas. Punkts Q sadala nogriezni AB attiecībā 5:1 skaitot no punkta A . Nosaki punkta Q koordinātas.
- 1.60.** Nosaki punkta M koordinātas, ja zināms, ka tas atrodas vienādā attālumā no punktiem $A(7; -1)$, $B(-2; 2)$ un $C(-1; -5)$.
- 1.61.** $\vec{F}_1$ ir 3 N liels spēks, kas iedarbojas uz ķermeni vertikāli uz augšu un $\vec{F}_2$ ir 3 N liels spēks, kura virziens ir 60° attiecībā pret vertikālo virzienu.
- Uzzīmē gan vektorus $\vec{F}_1$ un $\vec{F}_2$, gan to summas vektoru.
 - Aprēķini vektoru $\vec{F}_1$ un $\vec{F}_2$ summas vektora garumu.
 - Nosaki vektora $\vec{F}_3$ garumu un tā virziena leņķi, ja zināms, ka $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$.
- 1.62.** No viena punkta atlikti vektori $\vec{a} + \vec{b}$, $2\vec{a} - \vec{b}$ un $-5\vec{a} + 13\vec{b}$. Pierādi, ka to galapunkti atrodas uz vienas taisnes.
- 1.63.** Uzskicē zīmējumu, kas parāda, ka $|-2\vec{v}| = 2|\vec{v}|$.
- 1.64.** Pierādi, ka $|k\vec{v}| = |k||\vec{v}|$.



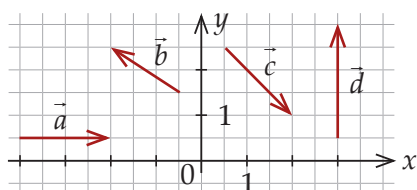
Paškontroles uzdevumi

- 1.** Doti vektori $\vec{a}$ un $\vec{b}$ (skat.1.55. att.).
Uzzīmē $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{a} - 2\vec{b}$!



1.55. att.

2. Uzzīmē 1.56. attēlā doto vektoru ģeometriskās projekcijas un nosaki to projekcijas uz koordinātu asīm!

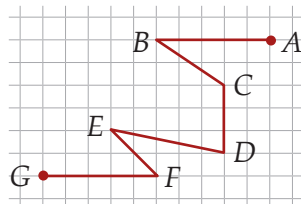


1.56.att.

3. Dots paralelograms $ABCD$, tā diagonāļu krustpunkts ir punkts O , $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ un $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Izsaki ar vektoru $\vec{a}$ un $\vec{b}$ palīdzību vektorus:

- a) $\overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{DB}$; c) $\overrightarrow{CO}$; d) $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}$.

4. Pastaigājoties suns pārvietojas pa trajektoriju $ABCDEFG$ (skat. 1.57. att.), toties suņa saimnieks devās taisni no punkta A uz punktu G . Izsaki vektorus $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FG}$ un $\overrightarrow{AG}$ koordinātu formā!



1.57. att.

5. Doti punkti $A(1; 6)$, $B(4; 8)$ un $C(-2; 5)$. Nosaki vektoru $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$ un $\overrightarrow{AC}$ koordinātas un garumu!

6. Dots: ka $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ un $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Izsaki $\overrightarrow{BC}$ ar vektoriem $\vec{a}$ un $\vec{b}$! Izsaki $\overrightarrow{CB}$ ar vektoriem $\vec{a}$ un $\vec{b}$!

7. Dots $\vec{u} = (3; 1)$, $\vec{v} = (-8; 4)$, $\vec{w} = (-6; -2)$. Aprēķini:

- a) $\vec{u} + \vec{v}$; c) $3\vec{u} + \vec{w}$; e) $\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{w}$; g) $|\vec{u}| + \left|\frac{1}{2}\vec{w}\right|$;
b) $\vec{u} - \vec{v}$; d) $|3\vec{u} + \vec{w}|$; f) $\left|\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{w}\right|$; h) $\frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}$.

8. Paralelograma $ABCD$ virsotnes atrodas punktos $A(1; 2)$, $B(3; 8)$, $C(9; 10)$ un $D(x; y)$. Aprēķini x un y !

9. Punkta A koordinātas ir $(4; 0)$. Atrodi punkta P koordinātas, lai $|\overrightarrow{AP}| = 2$!

10. Aprēķinus veic ar precizitāti līdz desmitdaļām!

Ieva vēlas pārpeldēt upi, kuras straumes ātrums ir $2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Ieva peld ar ātrumu $3,5 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Aprēķini:

- a) kādā leņķī attiecībā pret krastu viņai jāpeld, lai upi šķērsotu perpendikulāri krastam;
b) peldētājas rezultējošo ātrumu!

11. Aprēķinus veic ar precizitāti līdz vieniem!

Baļķa vidū ir piesietas divas troses, kuras uz augšu velk divi ceļamkrāni. Vienu trosi ceļamkrāns velk ar 65 kN lielu spēku, bet otru trosi velk otrs ceļamkrāns ar 75 kN lielu spēku. Spēki ar vertikāli veido attiecīgi 46° un 44° lielus leņķus. Cik liels ir abu ceļamkrānu rezultējošais spēks?