Ināra Jermačenko

Trigonometriskie vienādojumi un nevienādības (Teorētiskais konspekts)

Materiāls izstrādāts
ESF Darbības programmas 2007. - 2013.gadam "Cilvēkresursi un nodarbinātība"
prioritātes 1.2. "Izglītība un prasmes"
pasākuma 1.2.1. "Profesionālās izglītības un vispārējo prasmju attīstība"
aktivitātes 1.2.1.2. "Vispārējo zināšanu un prasmju uzlabošana"
apakšaktivitātes 1.2.1.1.2. "Profesionālajā izglītībā iesaistīto pedagogu
kompetences paaugstināšana"
Latvijas Universitātes realizētā projekta
"Profesionālajā izglītībā iesaistīto vispārizglītojošo mācību priekšmetu pedagogu
kompetences paaugstināšana"
(Vienošanās Nr.2009/0274/1DP/1.2.1.1.2/09/IPIA/VIAA/003,
LU reģistrācijas Nr.ESS2009/88) īstenošanai.

Rīga, 2011.

Teorētiskais konspekts **TRIGONOMETRISKIE VIENĀDOJUMI UN NEVIENĀDĪBAS**

Definīcija. Par ***trigonometrisko vienādojumu*** sauc tādu vienādojumu, kurā nezināmais ir kādas trigonometriskās funkcijas arguments.

Atrisināt trigonometrisko vienādojumu nozīmē vai nu atrast visas tās nezināmā vērtības, ar kurām vienādojums kļūst par skaitliski patiesu vienādību, vai arī pamatot, ka šādu vērtību nav.

VIENĀDOJUMA $\sin x = a$ ATRISINĀŠANA

Ja funkcija $y = f(x)$ ir monotona kādā intervālā, tad, zinot kādu funkcijas vērtību, var viennozīmīgi noteikt argumenta atbilstošo vērtību.

Viens no funkcijas $y = \sin x$ monotonitātes intervāliem ir $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (skat. teor. konspektu "Trigonometriskās funkcijas"). Tātad katram skaitlim no intervāla $[-1;\ 1]$ (funkcijas vērtību apgabals) var aprēķināt skaitli (pagrieziena leņķi) no intervāla $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, kura sinuss ir vienāds ar doto skaitli.

$y = x^2$, ja $y = 4$, tad $x = \ldots\ldots$

$y = \sin x$, ja $y = 1$, tad $x = ?$

Definīcija. Par reāla skaitļa $\boldsymbol{a}$ $\left(\boldsymbol{a} \in [-1;\ 1]\right)$ ***arksinusu*** sauc tādu leņķi $\boldsymbol{\alpha}$ no intervāla $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, kura sinuss ir vienāds ar skaitli $\boldsymbol{a}$. Pieraksta $\mathbf{arcsin}\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\alpha}$.

$$\boxed{\arcsin a = \alpha\,, \quad \text{ja} \quad \sin\alpha = a \quad \text{un} \quad \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]}$$

Izmantojot sinusa vērtību tabulu, var sastādīt atbilstošo arksinusa vērtību tabulu.

a	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin a$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

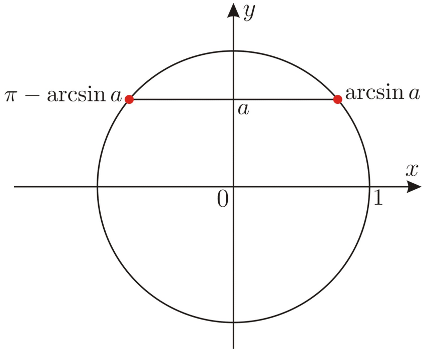
No šīs tabulas viegli redzēt, ka $\boxed{\arcsin(-a) = -\arcsin a}$.

$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, jo

$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ un $\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

$\arcsin 2$ neeksistē, jo nav tāda leņķa, kura sinuss būtu vienāds ar 2.

Izmantojot arksinusa definīciju, var atrisināt vienādojumu $\boldsymbol{\sin x = a}$, ja $\boldsymbol{a \in [-1;\ 1]}$.



1. zīm.

$x_1 = \arcsin a$

$x_2 = \pi - \arcsin a$

Ņemot vērā sinusa funkcijas periodiskumu ($T = 2\pi\, k$, $k \in \mathbb{Z}$), iegūst vienādojuma $\boldsymbol{\sin x = a}$ atrisinājumu vispārīgā formā:

$$\left[\begin{array}{l} \boldsymbol{x = \arcsin a + 2\pi\, k,} \\ \boldsymbol{x = \pi - \arcsin a + 2\pi\, k,} \quad \text{kur} \quad \boldsymbol{k \in \mathbb{Z}.} \end{array}\right.$$

Divas atrisinājumu formulas var apvienot vienā formulā

$$\boldsymbol{x = (-1)^m \cdot \arcsin a + \pi m,} \quad \boldsymbol{m \in \mathbb{Z}}.$$

1. uzdevums. Atrisināt vienādojumus:

a) $\sin x = \dfrac{1}{2}$.

Tā kā $\arcsin \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{6}$, tad

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi\, k, \\ x = \pi - \dfrac{\pi}{6} + 2\pi\, k, \quad k \in \mathbb{Z}; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi\, k, \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi\, k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

$\left(\text{vai} \quad x = (-1)^m \cdot \dfrac{\pi}{6} + \pi\, m, \quad m \in \mathbb{Z}\right)$

b) $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Tā kā $\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{4}$, tad

$$\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi\, k, \\ x = \pi - \left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + 2\pi\, k, \quad k \in \mathbb{Z}; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi\, k, \\ x = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi\, k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

$\left(\text{vai} \quad x = (-1)^{m+1} \cdot \dfrac{\pi}{4} + \pi\, m, \quad m \in \mathbb{Z}\right)$

c) $\sin x = 0.3$.

d) $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Tā kā $\arcsin \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{3}$, tad

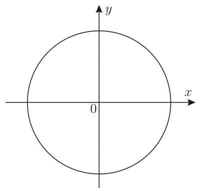
$$\left[\begin{array}{l} 2x - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi\, k, \\ 2x - \dfrac{\pi}{6} = \pi - \dfrac{\pi}{3} + 2\pi\, k, \quad k \in \mathbb{Z}; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{6} + 2\pi\, k, \\ 2x = \dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\pi}{6} + 2\pi\, k, \quad k \in \mathbb{Z}; \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi\, k, \\ 2x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi\, k, \quad k \in \mathbb{Z}; \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \pi\, k, \\ x = \dfrac{5\pi}{12} + \pi\, k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

e) $\sin \dfrac{x}{2} = -0.1$.

Ir daži speciālgadījumi, kuru atrisinājumu viegli nolasīt no vienības riņķa līnijas.
Atzīmēt uz vienības riņķa līnijas atbilstošos punktus:

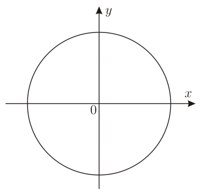
$$\mathbf{sin}\, \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$



2. zīm.

$$\boxed{\boldsymbol{x = \pi\, k, \quad k \in} \mathbb{Z}}$$

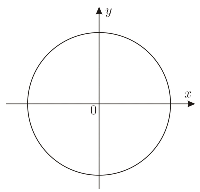
$$\mathbf{sin}\, \boldsymbol{x} = \mathbf{1}$$



3. zīm.

$$\boxed{\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2} + 2\pi\, k, \quad k \in} \mathbb{Z}}$$

$$\mathbf{sin}\, \boldsymbol{x} = \mathbf{-1}$$



4. zīm.

$$\boxed{\boldsymbol{x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi\, k, \quad k \in} \mathbb{Z}}$$

2. uzdevums.
Atrisināt vienādojumus:

$$\sin 3x = 0$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{5}\right) = 1$$

$$\sin(0.1x) = -1$$

VIENĀDOJUMA $\cos x = a$ ATRISINĀŠANA

Viens no funkcijas $y = \cos x$ monotonitātes intervāliem ir $[0;\pi]$ (skat. teor. konspektu “Trigonometriskās funkcijas”). Tātad katram skaitlim no intervāla $[-1;\,1]$ (funkcijas vērtību apgabals) var viennozīmīgi aprēķināt skaitli (pagrieziena leņķi) no intervāla $[0;\pi]$, kura kosinuss ir vienāds ar doto skaitli.

$\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4}$, jo

$\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ un $\dfrac{\pi}{4} \in [0;\pi]$.

Definīcija. Par reāla skaitļa $\boldsymbol{a}$ $\big(\boldsymbol{a} \in [-1;\,1]\big)$ ***arkkosinusu*** sauc tādu leņķi $\boldsymbol{\alpha}$ no intervāla $[0;\pi]$, kura kosinuss ir vienāds ar skaitli $\boldsymbol{a}$. Pieraksta $\mathbf{arccos}\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\alpha}$.

$$\boxed{\arccos a = \alpha\,, \quad \text{ja} \quad \cos\alpha = a \quad \text{un} \quad \alpha \in [0;\pi]}$$

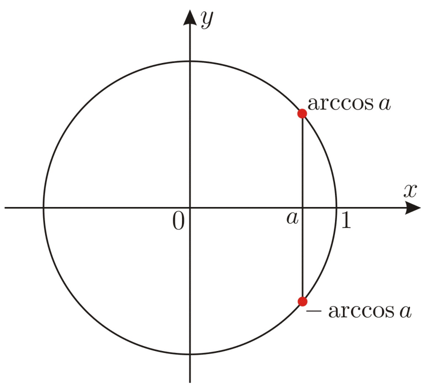
Izmantojot kosinusa vērtību tabulu, var sastādīt atbilstošo arkkosinusa vērtību tabulu.

a	-1	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$-\dfrac{1}{2}$	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos a$	π	$\dfrac{5\pi}{6}$	$\dfrac{3\pi}{4}$	$\dfrac{2\pi}{3}$	0	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{6}$	0

$\arccos\sqrt{3}$ neeksistē, jo nav tāda leņķa, kura kosinuss būtu vienāds ar $\sqrt{3}$ $(\sqrt{3} \notin [-1;1])$.

Arkkosinusam pastāv šāda īpašība $\boxed{\arccos(-a) = \pi - \arccos a}$.

Izmantojot arkkosinusa definīciju, var atrisināt vienādojumu $\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$, ja $\boldsymbol{a} \in [\mathbf{-1;\,1}]$.



5. zīm.

$x_1 = \arccos a$
$x_2 = -\arccos a$
Ņemot vērā kosinusa funkcijas periodiskumu ($T = 2\pi\,k$, $k \in \mathbb{Z}$), iegūst vienādojuma $\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ atrisinājumu vispārīgā formā:

$$\left[\begin{array}{l} \boldsymbol{x = \arccos a + 2\pi\,k,} \\ \boldsymbol{x = -\arccos a + 2\pi\,k,} \quad \text{kur} \quad \boldsymbol{k \in \mathbb{Z},} \end{array}\right.$$

vai divas atrisinājumu formulas var apvienot vienā formulā

$$\boldsymbol{x = \pm\arccos a + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}}\,.$$

3. uzdevums. Atrisināt vienādojumus:

a) $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Tā kā $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{3\pi}{4}$, tad

$x = \pm\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

b) $\cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Tā kā $\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{6}$, tad

$\dfrac{x}{2} = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$,

$x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 4\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

c) $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Tā kā $\arccos\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{3}$, tad

$x + \dfrac{\pi}{6} = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$

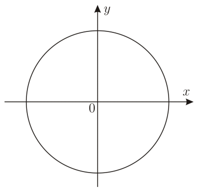
$x = \pm\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$

vai $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$

c) $\cos x = -0.6$.

Vienādojumam $\cos x = a$ ir speciālgadījumi, kuru atrisinājumus var nolasīt no vienības riņķa līnijas. Atzīmēt uz vienības riņķa līnijas atbilstošos punktus:

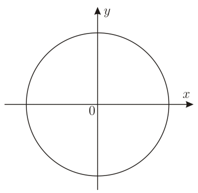
$\boldsymbol{\cos x = 0}$



6. zīm.

$\boxed{\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}}}$

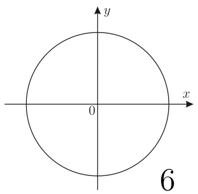
$\boldsymbol{\cos x = 1}$



7. zīm.

$\boxed{\boldsymbol{x = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}}}$

$\boldsymbol{\cos x = -1}$



8. zīm.

$\boxed{\boldsymbol{x = \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}}}$

4. uzdevums.
Atrisināt vienādojumus:

$\cos 2x = 0$

$\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

$\cos(0.2x) = -1$

VIENĀDOJUMA $\operatorname{tg} x = a$ ATRISINĀŠANA

Funkcijas $y = \operatorname{tg} x$ vērtību apgabals ir visu reālu skaitļu kopa, funkcija monotona, piemēram, intervālā $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (skat. teor. konspektu "Trigonometriskās funkcijas"). Tātad katram reālam skaitlim var viennozīmīgi aprēķināt skaitli (pagrieziena leņķi) no intervāla $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, kura tangenss ir vienāds ar doto skaitli.

Definīcija. Par reāla skaitļa $\boldsymbol{a}$ ***arktangensu*** sauc tādu leņķi $\boldsymbol{\alpha}$ no intervāla $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, kura tangenss ir vienāds ar skaitli $\boldsymbol{a}$. Pieraksta $\mathbf{arctg}\, \boldsymbol{a} = \boldsymbol{\alpha}$.

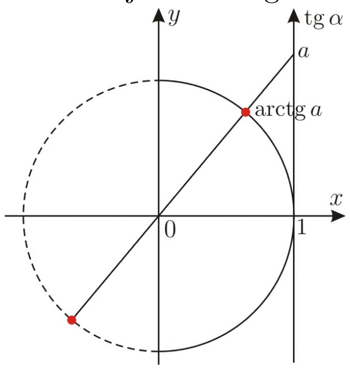
$$\boxed{\operatorname{arctg} a = \alpha\,, \quad \text{ja} \quad \operatorname{tg} \alpha = a \quad \text{un} \quad \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)}$$

Izmantojot tangensa vērtību tabulu, var sastādīt atbilstošo arktangensa vērtību tabulu.

a	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} a$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

Var redzēt no tabulas, ka $\boxed{\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a}$.

Izmantojot arktangensa definīciju, var atrisināt vienādojumu $\mathbf{tg}\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ visiem reāliem skaitļiem $\boldsymbol{a}$.



9. zīm.

Ņemot vērā tangensa funkcijas periodiskumu ($T = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$), var apskatīt vienādojuma $\mathbf{tg}\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ atrisinājumus tikai uz vienības riņķa līnijas puses (IV un I kvadrantos); atrisinājumus vispārīgā formā var pierakstīt šādi:

$$\boldsymbol{x = \mathbf{arctg}\, a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}}.$$

$\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$, jo

$\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ un $\frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

5. uzdevums. Atrisināt vienādojumu.

$\operatorname{tg}(2x + \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}$.

$2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$

$2x = \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$

$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

VIENĀDOJUMA $\operatorname{ctg} x = a$ ATRISINĀŠANA

Funkcijas $y = \operatorname{ctg} x$ vērtību apgabals ir visu reālu skaitļu kopa, funkcija monotona, piemēram, intervālā $(0;\pi)$ (skat. teor. konspektu "Trigonometriskās funkcijas"). Tātad katram reālam skaitlim var viennozīmīgi aprēķināt skaitli (pagrieziena leņķi) no intervāla $(0;\pi)$, kura kotangenss ir vienāds ar doto skaitli.

Definīcija. Par reāla skaitļa $\boldsymbol{a}$ ***arkkotangensu*** sauc tādu leņķi $\boldsymbol{\alpha}$ no intervāla $(0;\pi)$, kura kotangenss ir vienāds ar skaitli $\boldsymbol{a}$. Pieraksta $\mathbf{arcctg}\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\alpha}$.

$\operatorname{arcctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$, jo

$\operatorname{ctg} \dfrac{\pi}{4} = 1$ un $\dfrac{\pi}{4} \in (0;\pi)$.

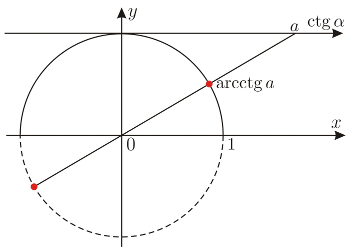
$$\boxed{\operatorname{arcctg} a = \alpha\,, \quad \text{ja} \quad \operatorname{ctg} \alpha = a \quad \text{un} \quad \alpha \in (0;\pi)}$$

Izmantojot kotangensa vērtību tabulu, var sastādīt atbilstošo arkkotangensa vērtību tabulu.

a	$-\sqrt{3}$	-1	$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arcctg} a$	$\dfrac{5\pi}{6}$	$\dfrac{3\pi}{4}$	$\dfrac{2\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{6}$

Var redzēt no tabulas, ka $\boxed{\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a}$.

Izmantojot arkkotangensa definīciju, var atrisināt vienādojumu $\mathbf{ctg}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ visiem reāliem skaitļiem $\boldsymbol{a}$.



10. zīm.

Ņemot vērā kotangensa funkcijas periodiskumu ($T = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$), var apskatīt vienādojuma $\mathbf{ctg}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ atrisinājumus tikai uz vienības riņķa līnijas puses (I un II kvadrantos); atrisinājumus vispārīgā formā var pierakstīt šādi:

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{arcctg}\,\boldsymbol{a} + \boldsymbol{\pi k}, \quad \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}.$$

6. uzdevums. Atrisināt vienādojumu.

$\operatorname{ctg}(x - \dfrac{\pi}{4}) = 2;$

$x - \dfrac{\pi}{4} = \operatorname{arcctg} 2 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$

$x = \dfrac{\pi}{4} + \operatorname{arcctg} 2 + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

TRIGONOMETRISKO VIENĀDOJUMU RISINĀŠANAS PAŅĒMIENI

Lielāka daļa trigonometrisku vienādojumu sākotnēji nav doti pamatvienādojuma formā, tāpēc vispirms tos nepieciešams pārveidot. Paņēmieni, lai to izdarītu, ir dažādi. Daudzos gadījumos ir iespējams pielietot trigonometriskās formulas, izmantot reizinājuma vienādību ar nulli vai reducēt trigonometrisko vienādojumu par algebrisku vienādojumu, ieviešot jauno mainīgo.

Vienādojumi, kurus atrisina, izmantojot reizinājuma vienādību ar nulli

7. uzdevums. Atrisināt vienādojumus:

a) $\cos^2 x - 2\cos x = 0$.

$\cos x(\cos x - 2) = 0$, tad

$\cos x = 0$ vai $\cos x = 2$

$x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$ $\quad\varnothing$, jo $2 \notin [-1;\, 1]$

Atbilde: $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

b) $\sin x + \sin 3x = 0$.

$2\sin 2x\, \cos x = 0$, tad

$\sin 2x = 0$ vai $\cos x = 0$

$2x = \pi k$ vai $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$

$x = \dfrac{\pi}{2} k$

Atbilde: $x = \dfrac{\pi}{2} k, \quad k \in \mathbb{Z}$.

c) $\sin 3x \operatorname{ctg} x = 0$. Tā kā $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, tad

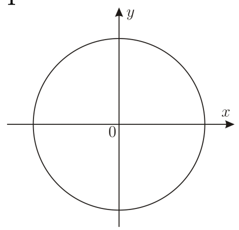
$$\left[\begin{array}{l} \sin 3x = 0, \\ \sin x \neq 0, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3x = \pi k, \\ x \neq \pi k, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{3} k, \\ x \neq \pi k; \end{array}\right.$$

vai

$\cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$.

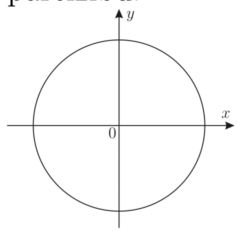
Atbilde: $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi k$ vai $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, kur $k \in \mathbb{Z}$.

Atzīmēt uz vienības riņķa līnijas 7.b) vienādojuma iegūtās atrisinājumu kopas un pamatot pierakstītas atbildes pareizību.



11. zīm.

Atzīmēt uz vienības riņķa līnijas 7.c) vienādojuma iegūtās atrisinājumu kopas un pamatot pierakstītas atbildes pareizību.



12. zīm.

Vienādojumi, kurus atrisina, izmantojot substitūcijas metodi

8. uzdevums. Atrisināt vienādojumus:

a) $2\cos^2 x = 3\sin x + 3.$

$2(1-\sin^2 x) = 3\sin x + 3,$

$2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$

Apzīmē $\sin x = t, \quad t \in [-1;\, 1]$ un iegūst

$2t^2 + 3t + 1 = 0$

$t_1 = -1, \qquad t_2 = -\dfrac{1}{2}.$ Tad

$\sin x = -1$ vai $\sin x = -\dfrac{1}{2}$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi\, k \qquad \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi\, k, \\[2ex] x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi\, k \end{array}\right.$$

Atbilde: $\left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi\, k, \\[2ex] x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi\, k, \\[2ex] x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi\, k, \end{array}\right.$ kur $k \in \mathbb{Z}$.

b) $\sin x - \cos x = 0\,.$

Dalot vienādojuma abas puses ar $\cos x$, iegūst

$\operatorname{tg} x - 1 = 0$ jeb $\operatorname{tg} x = 1.$ Tad

$x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Atbilde: $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$

c) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0\,.$

Dalot vienādojuma abas puses ar .... iegūst

Atbilde: ....

d) $\sin^2 x + \sin 2x - 3\cos^2 x = 0.$ Tā kā $\sin 2x = 2\sin x\cos x,$ tad

$\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$

Dalot vienādojuma abas puses ar $\cos^2 x$, iegūst

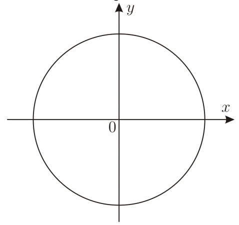
$\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 3 = 0.$ Apzīmē $\operatorname{tg} x = t,$ un iegūst $t^2 + 2t - 3 = 0,$

kvadrātvienādojuma saknes $t_1 = -3$ vai $t_2 = 1.$ Tātad

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = -3, \\[2ex] \operatorname{tg} x = 1, \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi\, k, \\[2ex] x = \dfrac{\pi}{4} + \pi\, k. \end{array}\right.$$

Atbilde: $\left[\begin{array}{l} x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi\, k, \\[2ex] x = \dfrac{\pi}{4} + \pi\, k, \end{array}\right.$ kur $k \in \mathbb{Z}$.

Atzīmēt uz vienības riņķa līnijas 8.a) vienādojuma atrisinājumu kopas.



13. zīm.

Atrisināt vienādojumu
$\cos^2 x - 3\cos x = \sin^2 x + 4$

TRIGONOMETRISKAS NEVIENĀDĪBAS

Definīcija. Par ***trigonometrisku nevienādību*** sauc tādu nevienādību, kurā nezināmais ir kādas trigonometriskās funkcijas arguments.

Ar ***trigonometriskām pamatnevienādībām*** saprot nevienādības, kuru vispārīgais veids ir $\sin x > a$ (arī $<, \geq, \leq$), $\cos x > a$ (arī $<, \geq, \leq$), $\operatorname{tg} x > a$ (arī $<, \geq, \leq$), $\operatorname{ctg} x > a$ (arī $<, \geq, \leq$). Lai atrisinātu šīs nevienādības, parasti izmanto vienības riņķa līniju.

RISINĀŠANAS SOĻI

1) Aprēķina nevienādībai atbilstošā skaitļa $\boldsymbol{a}$ "arkvērtību" ($\arcsin a$, $\arccos a$, $\operatorname{arctg} a$, vai $\operatorname{arcctg} a$).

2) Vienības riņķa līnijā uz atbilstošās ass atzīmē $\boldsymbol{a}$ vērtību (uz y ass, ja nevienādība satur $\sin x$; uz x ass, ja nevienādība satur $\cos x$; uz tangensu ass, ja nevienādība satur $\operatorname{tg} x$; uz kotangensu ass, ja nevienādība satur $\operatorname{ctg} x$).

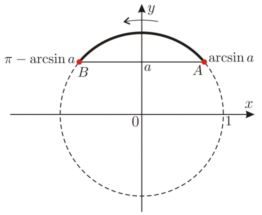
3) Uz izvēlētās ass iezīmē nevienādībai atbilstošās vērtības - lielākas vai mazākas par $\boldsymbol{a}$, saskaņā ar doto nevienādības veidu.

4) Uz vienības riņķa līnijas izvēlas loku (vai lokus), kas atbilst iezīmētajai ass daļai.

5) Izvēlētajam lokam atzīmē virzienu, kurā, pārvietojoties pa vienības riņķa līniju, pagrieziena leņķu vērtības palielinās (t.i., pretēji pulksteņa rādītāja kustības virzienam).

6) Nosaka pagrieziena leņķa vērtības loka galapunktos (lai loka sākumpunktam atbilstošā leņķa vērtība būtu mazāka nekā otram galapunktam atbilstošā leņķa vērtība).

7) Pieraksta atbildi saskaņā ar doto nevienādības veidu (stigra vai nestingra nevienādība), pieskaitot galapunktiem atbilstošās funkcijas perioda daudzkārtni (sinusa un kosinusa funkcijām $2\pi k$, tangensa un kotangensa funkcijām πk).



$\sin x \geq a \quad (a > 0)$

$\arcsin a \leq x_1 \leq \pi - \arcsin a$

14. zīm.

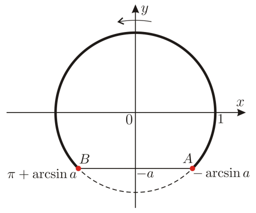
$x \in [\arcsin a + 2\pi k;\ \pi - \arcsin a + 2\pi k],\ k \in \mathbb{Z}$

Atrisināt nevienādību $\sin x \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\arcsin \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{3}$, tātad

$x \in \left[\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k;\ \pi - \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k\right]$, jeb

$x \in \left[\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k;\ \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.



$\sin x \geq -a \quad (a > 0)$

$-\arcsin a \leq x_1 \leq \pi + \arcsin a$

15. zīm.

$x \in [-\arcsin a + 2\pi k;\ \pi + \arcsin a + 2\pi k],\ k \in \mathbb{Z}$

Atrisināt nevienādību $\sin x \geq -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

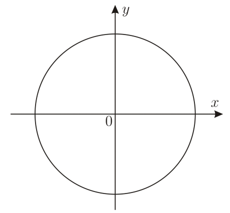
$\arcsin \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4}$, tātad

$x \in \left[-\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k;\ \pi + \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k\right]$, jeb

$x \in \left[-\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k;\ \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Atrisināt nevienādību

$\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) > \dfrac{1}{2}$



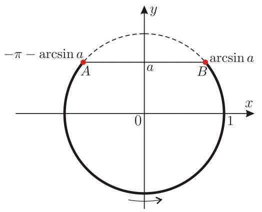
$\arcsin \dfrac{1}{2} = \ldots\ldots.$

16. zīm.

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots < x - \dfrac{\pi}{3} < \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots < x < \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$x \in \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$



$\sin x \leq a \quad (a > 0)$

$-\pi - \arcsin a \leq x_1 \leq \arcsin a$

17. zīm.

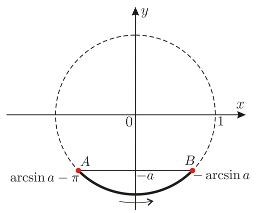
$x \in [-\arcsin a - \pi + 2\pi k;\ \arcsin a + 2\pi k],\ k \in \mathbb{Z}$

Atrisināt nevienādību $\sin x \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\arcsin \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4}$, tātad

$x \in \left[-\dfrac{\pi}{4} - \pi + 2\pi k;\ \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k\right]$, jeb

$x \in \left[-\dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k;\ \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.



$\sin x \leq -a \quad (a > 0)$

$\arcsin a - \pi \leq x_1 \leq -\arcsin a$

18. zīm.

$x \in [\arcsin a - \pi + 2\pi k;\ -\arcsin a + 2\pi k],\ k \in \mathbb{Z}$

Atrisināt nevienādību $\sin x \leq -\dfrac{1}{2}$.

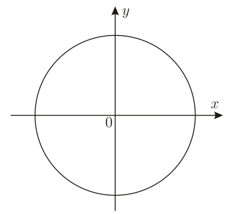
$\arcsin \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{6}$, tātad

$x \in \left[\dfrac{\pi}{6} - \pi + 2\pi k;\ -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k\right]$, jeb

$x \in \left[-\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k;\ -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Atrisināt nevienādību

$\sin 2x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$



$\arcsin \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \ldots\ldots.$

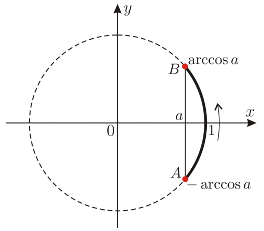
19. zīm.

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots < 2x < \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots < x < \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$x \in \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

TRIGONOMETRISKAS PAMATNEVIENĀDĪBAS AR $\cos x$



20. zīm.

$$\cos x \geq a \quad (a > 0)$$

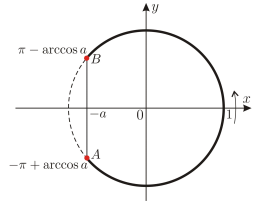
$$-\arccos a \leq x_1 \leq \arccos a$$

$$x \in [-\arccos a + 2\pi k;\ \arccos a + 2\pi k],\ k \in \mathbb{Z}$$

Atrisināt nevienādību $\cos x \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\arccos \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4}$, tātad

$$x \in \left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{4} + 2\pi k\right],\ k \in \mathbb{Z}.$$



21. zīm.

$$\cos x \geq -a \quad (a > 0)$$

$$\arccos a - \pi \leq x_1 \leq \pi - \arccos a$$

$$x \in [\arccos a - \pi + 2\pi k;\ \pi - \arccos a + 2\pi k],\ k \in \mathbb{Z}$$

Atrisināt nevienādību $\cos x \geq -\dfrac{1}{2}$.

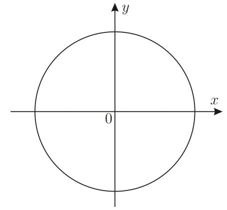
$\arccos \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{3}$, tātad

$$x \in \left[\frac{\pi}{3} - \pi + 2\pi k;\ \pi - \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right], \quad \text{jeb}$$

$$x \in \left[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k;\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right],\ k \in \mathbb{Z}.$$

Atrisināt nevienādību

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) > \frac{1}{2}$$



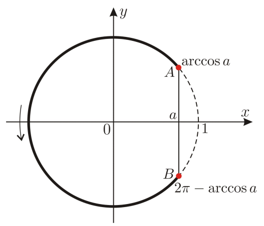
22. zīm.

$\arccos \dfrac{1}{2} = \ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots < x + \dfrac{\pi}{6} < \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots < x < \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$x \in \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$



23. zīm.

$$\cos x \leq a \quad (a > 0)$$

$$\arccos a \leq x_1 \leq 2\pi - \arccos a$$

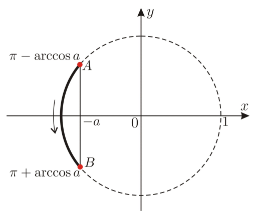
$$x \in [\arccos a + 2\pi k;\ 2\pi - \arccos a + 2\pi k],\ k \in \mathbb{Z}$$

Atrisināt nevienādību $\cos x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\arccos \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{6}$, tātad

$$x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ 2\pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right], \quad \text{jeb}$$

$$x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{11\pi}{6} + 2\pi k\right],\ k \in \mathbb{Z}.$$



24. zīm.

$$\cos x \leq -a \quad (a > 0)$$

$$\pi - \arccos a \leq x_1 \leq \pi + \arccos a$$

$$x \in [\pi - \arccos a + 2\pi k;\ \pi + \arccos a + 2\pi k],\ k \in \mathbb{Z}$$

Atrisināt nevienādību $\cos x \leq -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

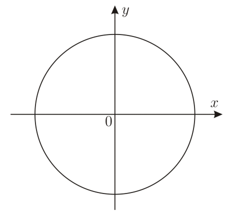
$\arccos \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4}$, tātad

$$x \in \left[\pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi k;\ \pi + \frac{\pi}{4} + 2\pi k\right], \quad \text{jeb}$$

$$x \in \left[\frac{3\pi}{4} + 2\pi k;\ \frac{5\pi}{4} + 2\pi k\right],\ k \in \mathbb{Z}.$$

Atrisināt nevienādību

$$\cos \frac{x}{2} < -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



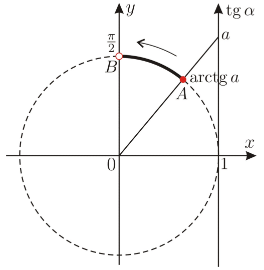
25. zīm.

$\arccos \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots < \dfrac{x}{2} < \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots < x < \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$x \in \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$



$\operatorname{tg} x \geq a \quad (a > 0)$

$\operatorname{arctg} a \leq x_1 < \dfrac{\pi}{2}$

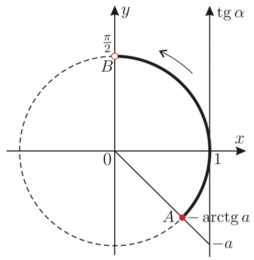
26. zīm.

$$x \in \left[\operatorname{arctg} a + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), \, k \in \mathbb{Z}$$

Atrisināt nevienādību $\operatorname{tg} x \geq \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$\operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\pi}{6}$, tātad

$x \in \left[\dfrac{\pi}{6} + \pi k; \dfrac{\pi}{2} + \pi k\right), \, k \in \mathbb{Z}.$



$\operatorname{tg} x \geq -a \quad (a > 0)$

$-\operatorname{arctg} a \leq x_1 < \dfrac{\pi}{2}$

27. zīm.

$$x \in [-\operatorname{arctg} a + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k), \, k \in \mathbb{Z}$$

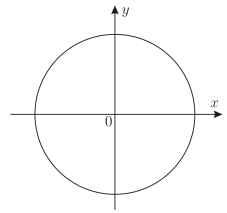
Atrisināt nevienādību $\operatorname{tg} x \geq -1$.

$\operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$, tātad

$x \in \left[-\dfrac{\pi}{4} + \pi k; \dfrac{\pi}{2} + \pi k\right), \, k \in \mathbb{Z}.$

Atrisināt nevienādību

$\operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) > \sqrt{3}$



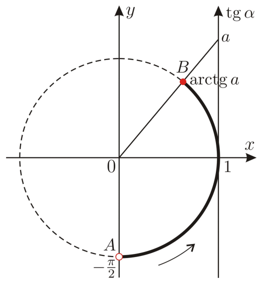
$\operatorname{arctg} \sqrt{3} =$ ....

28. zīm.

.... $< x - \dfrac{\pi}{4} <$ ....

.... $< x <$ ....

$x \in$ ....



$\operatorname{tg} x \leq a \quad (a > 0)$

$-\dfrac{\pi}{2} < x_1 \leq \operatorname{arctg} a$

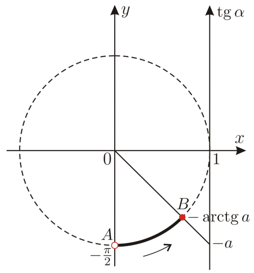
29. zīm.

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \operatorname{arctg} a + \pi k\right], \, k \in \mathbb{Z}$$

Atrisināt nevienādību $\operatorname{tg} x \leq 1$.

$\operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$, tātad

$x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi k; \dfrac{\pi}{4} + \pi k\right], \, k \in \mathbb{Z}.$



$\operatorname{tg} x \leq -a \quad (a > 0)$

$-\dfrac{\pi}{2} < x_1 \leq -\operatorname{arctg} a$

30. zīm.

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; -\operatorname{arctg} a + \pi k\right], \, k \in \mathbb{Z}$$

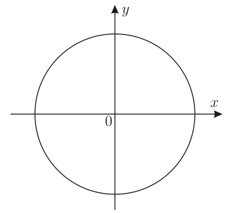
Atrisināt nevienādību $\operatorname{tg} x \leq -\sqrt{3}$.

$\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3}$, tātad

$x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi k; -\dfrac{\pi}{3} + \pi k\right], \, k \in \mathbb{Z}.$

Atrisināt nevienādību

$\operatorname{tg} \dfrac{x}{3} < -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$



$\operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{3}}{3} =$ ....

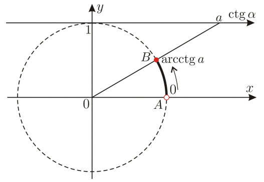
31. zīm.

.... $< \dfrac{x}{3} <$ ....

.... $< x <$ ....

$x \in$ ....

TRIGONOMETRISKAS PAMATNEVIENĀDĪBAS AR $\operatorname{ctg} x$



$\operatorname{ctg} x \geq a \quad (a > 0)$

$0 < x_1 \leq \operatorname{arcctg} a$

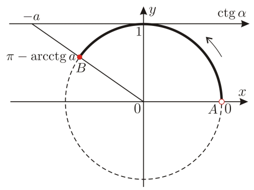
32. zīm.

$x \in (\pi k;\ \operatorname{arcctg} a + \pi k]\,,\ k \in \mathbb{Z}$

Atrisināt nevienādību $\operatorname{ctg} x \geq \sqrt{3}$.

$\operatorname{arcctg} \sqrt{3} = \dfrac{\pi}{6}$, tātad

$x \in \left(\pi k;\ \dfrac{\pi}{6} + \pi k\right]\,,\ k \in \mathbb{Z}$.



$\operatorname{ctg} x \geq -a \quad (a > 0)$

$0 < x_1 \leq \pi - \operatorname{arcctg} a$

33. zīm.

$x \in (\pi k;\ \pi - \operatorname{arcctg} a + \pi k],\ k \in \mathbb{Z}$

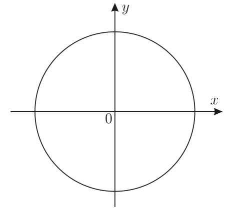
Atrisināt nevienādību $\operatorname{ctg} x \geq -1$.

$\operatorname{arcctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$, tātad

$x \in \left(\pi k;\ \dfrac{3\pi}{4} + \pi k\right]\,,\ k \in \mathbb{Z}$.

Atrisināt nevienādību

$\operatorname{ctg}\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) > -\sqrt{3}$



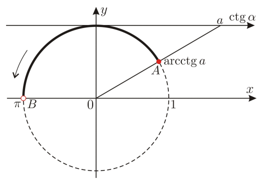
$\operatorname{arcctg} \sqrt{3} =$ ....

34. zīm.

.... $< x + \dfrac{\pi}{3} <$ ....

.... $< x <$ ....

$x \in$ ....



$\operatorname{ctg} x \leq a \quad (a > 0)$

$\operatorname{arcctg} a \leq x_1 < \pi$

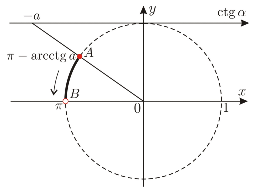
35. zīm.

$x \in [\operatorname{arcctg} a + \pi k;\ \pi + \pi k)\,,\ k \in \mathbb{Z}$

Atrisināt nevienādību $\operatorname{ctg} x \leq 1$.

$\operatorname{arcctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$, tātad

$x \in \left[\dfrac{\pi}{4} + \pi k;\ \pi + \pi k\right)\,,\ k \in \mathbb{Z}$.



$\operatorname{ctg} x \leq -a \quad (a > 0)$

$\pi - \operatorname{arcctg} a \leq x_1 < \pi$

36. zīm.

$x \in [\pi - \operatorname{arcctg} a + \pi k;\ \pi + \pi k)\,,\ k \in \mathbb{Z}$

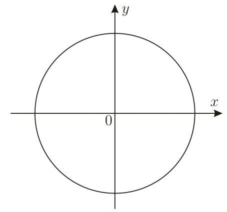
Atrisināt nevienādību $\operatorname{ctg} x \leq -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$\operatorname{arcctg} \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\pi}{3}$, tātad

$x \in \left[\dfrac{2\pi}{3} + \pi k;\ \pi + \pi k\right)\,,\ k \in \mathbb{Z}$.

Atrisināt nevienādību

$\operatorname{ctg} 3x < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$



$\operatorname{arcctg} \dfrac{\sqrt{3}}{3} =$ ....

37. zīm.

.... $< 3x <$ ....

.... $< x <$ ....

$x \in$ ....