Aira Kumerdanka

Ģeometrisko ķermeņu kombinācijas

Materiāls izstrādāts
ESF Darbības programmas 2007. - 2013.gadam „Cilvēkresursi un nodarbinātība”
prioritātes 1.2. „Izglītība un prasmes”
pasākuma 1.2.1.„Profesionālās izglītības un vispārējo prasmju attīstība”
aktivitātes 1.2.1.2. „Vispārējo zināšanu un prasmju uzlabošana”
apakšaktivitātes 1.2.1.1.2. „Profesionālajā izglītībā iesaistīto pedagogu
kompetences paaugstināšana”
Latvijas Universitātes realizētā projekta
„Profesionālajā izglītībā iesaistīto vispārizglītojošo mācību priekšmetu pedagogu kompetences paaugstināšana”
(Vienošanās Nr.2009/0274/1DP/1.2.1.1.2/09/IPIA/VIAA/003,
LU reģistrācijas Nr.ESS2009/88) īstenošanai.

Rīga, 2011.

Temata skolotāju atbalsta materiālu vispārīgs raksturojums

• Skolotāji var izmantot Mācību priekšmetu programmu, ko izstrādāja Dabaszinātņu un matemātikas projekts 2008.gadā. Tematā ir apskatīti svarīgākie 12.klases 7.temata jautājumi, kuri veido skolēniem kopsavilkumu par iepriekš vidusskolas kursā apgūtajiem ģeometriskajiem ķermeņiem. Tā ir iespēja atkārtot vidusskolas stereometrijas kursu, kā arī apgūt kopsakarības, kas pastāv starp ģeometriskajiem ķermeņiem, lai tos varētu ievilkt vienu otrā.

• Skolotājiem iesaku izmantot vizuālos materiālus, kas izveidoti Dabaszinātņu un matemātikas projekta laikā un nogādāti visām profesionāli tehniskajām skolām, kurās apgūst matemātikas mācību priekšmetu.

• Skolotāju atbalsta materiālos piedāvāju uzdevumus, kas varētu motivēt skolēnus apgūt attiecīgo tematu, kā arī tādus, kuri saistīti ar praktisko dzīvi un ikdienu, kā arī dod iespēju pielietot apgūtās matemātikas zināšanas un prasmes

Skolotāju atbalsta materiālā piedāvātie uzdevumi attīsta skolēniem nepieciešamās prasmes un ir prioritāte temata „Ģeometrisko ķermeņu kombinācijas" apguvē:

- raksturot ievilktu un apvilktu ģeometrisko ķermeņu elementu savstarpējo novietojumu un īpašības;
- attēlot ģeometrisko ķermeņu kombinācijas paralēlā projekcijā;
- aprēķināt elementu lielumus, virsmu laukumus, tilpumus un to attiecības, ja dota ģeometrisko ķermeņu kombinācija;
- veikt pilnu pētniecisku uzdevumu matemātikā.

Uzdevumi un darba lapas skolēniem

1.uzdevums. (1.stunda).

Veicot uzdevumu, skolēni:

1) *attīsta telpisko iztēli;*
2) *saskata ģeometriskos ķermeņus, nosaka to veidu.*

Ieteikumi skolotājam

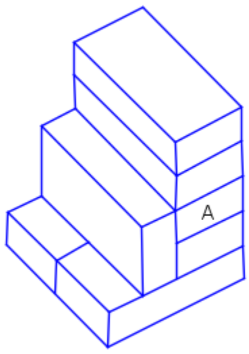
- Stundas sākumā katram skolēnu pārim piedāvā 3 attēlus, lai skolēni pārī izpēta un atbild uz jautājumiem. Ieteicams atkārtot jēdzienus: taisnstūra paralēlskaldnis, skaldnes. Ja ir iespējas var demonstrēt 3-dimensionālu animāciju par to, kā veidojas „krāvumi” no kubiņiem, interneta vietne: http://www.fi.uu.nl/wisweb/isdde/applets/BlokkenProgramma.htm
- Tad skolēni iegūtos rezultātus apspriež ar vēl vienu citu skolēnu pāri. Pārrunā rezultātus klasē kopīgi (var demonstrēt sagatavotu materiālu uz interaktīvās tāfeles).
- Skolotājs turpina sarunu par to, kas tad ir šie ģeometriskie ķermeņi (tie sastāv no mums zināmiem, bet nav neviens no tiem). Demonstrē piemērus no reālās dzīves, parādot Power Point prezentāciju (ppt1), ka visbiežāk sastopam tieši dažādu ģeometrisku ķermeņu kombinācijas – tādus ķermeņus, kas sastāv no vairākiem citiem.
- Ja skolēnu zināšanas fizikā ir pietiekamas, viņi var piedāvāt savu risinājumu optimālajam krāvumam un pamatot to ar aprēķiniem fizikā.

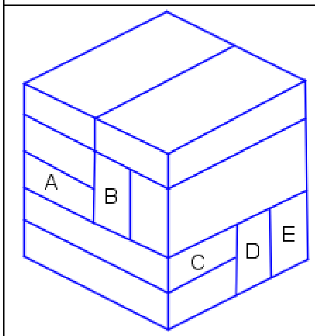
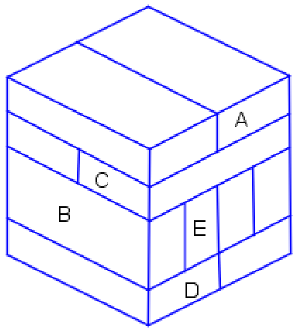
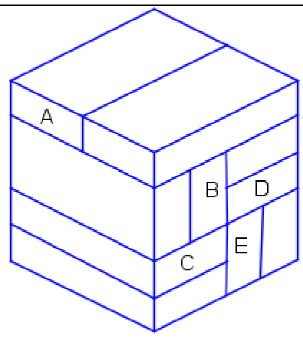
Darba lapa skolēniem

Celtniekiem bija jāsakrauj desmit atvestie bloki kaudzēs. Viņi bija norūpējušies par to, lai šie bloki nesabojātos, tādēļ izpētīja, ar cik citiem blokiem būs kopējas skaldnes izvēlētajiem A, B, C, D, E blokiem katrā no krāvumu veidiem. Visi bloki ir vienāda lieluma un taisnstūra paralēlskaldņa formā.

Izpēti dotos krāvumus un nosaki kopējo skaldņu skaitu blokiem A, B, C, D un E! Rezultātus ieraksti tabulā!

Piemērs. Šādā septiņu bloku krāvumā blokam A ir kopējas skaldnes ar 3 citiem blokiem.



<table>
<tr><td colspan="2">1.krāvums</td><td colspan="2">2.krāvums</td><td colspan="2">3.krāvums</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>A</td><td></td><td>A</td><td></td><td>A</td><td></td></tr>
<tr><td>B</td><td></td><td>B</td><td></td><td>B</td><td></td></tr>
<tr><td>C</td><td></td><td>C</td><td></td><td>C</td><td></td></tr>
<tr><td>D</td><td></td><td>D</td><td></td><td>D</td><td></td></tr>
<tr><td>E</td><td></td><td>E</td><td></td><td>E</td><td></td></tr>
</table>

Veicot 2.-7.uzdevumu, skolēni:

1) *nosaka, no kādiem ķermeņiem sastāv dotais ķermenis;*
2) *aprēķina ģeometriskā ķermeņa virsmas laukumu un tilpumu.*

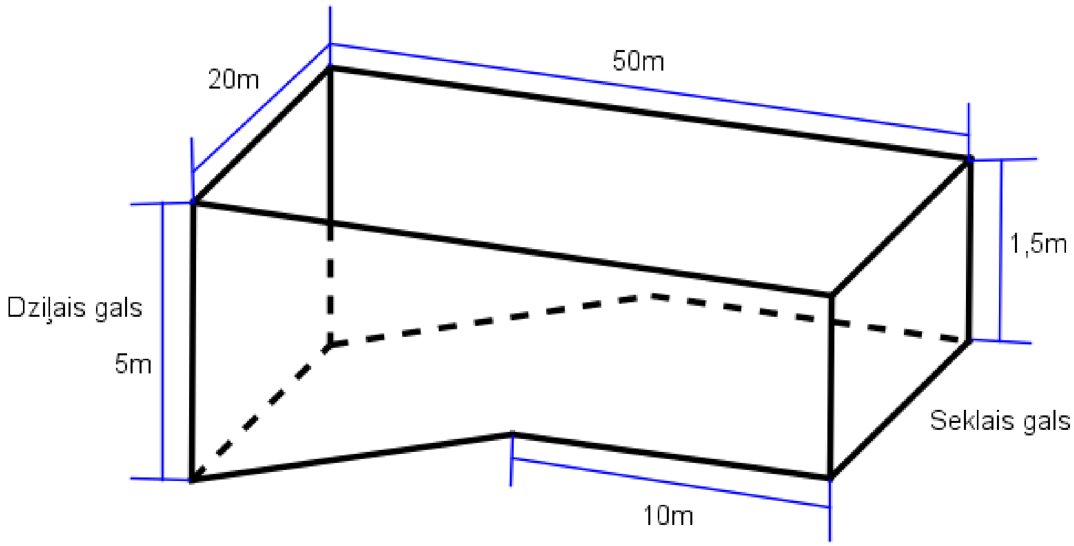
Ieteikumi skolotājam

- 2.-7.uzdevumu var piedāvāt risināt skolēniem pāros, kā arī atšķirīga ir uzdevumu grūtības pakāpe. Skolotājs pēc saviem ieskatiem var piedāvāt skolēniem uzdevumus atbilstoši viņu spējām.

2.uzdevums (1.stunda)

Darba lapa skolēnam

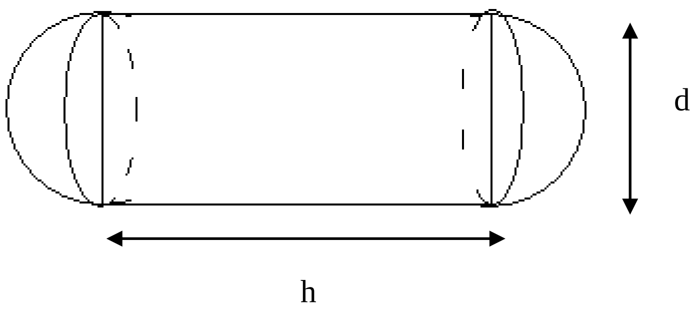
Zīmējumā shematiski parādīti liela peldbaseina izmēri.



1)Aprēķiniet, cik kubikmetru liels ir baseina tilpums!

2)Atpūtas centra īpašnieks ir nolēmis uzcelt vēl vienu baseinu ar tādu pašu garumu un platumu kā esošais, arī baseina tilpums būs tāds pats kā esošajam, mainīsies tikai dziļums. Seklākajā galā paredzēts 1m dziļums, tas būs 10m garš (tāpat kā esošajam baseinam). Nosakiet, cik dziļam baseinam būs jābūt dziļākajā vietā?

3.uzdevums (1.stunda)
Zīmējumā shematiski attēlota kapsula, kas sastāv no cilindriskas virsmas un divām puslodēm.



Dotas izteiksmes:

$\pi d + 2h$

$\pi d^2 + \frac{1}{4}\pi d^2 h$

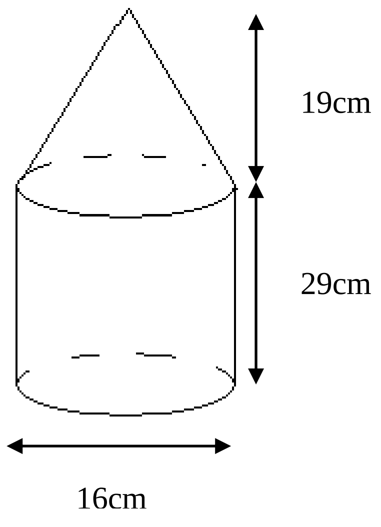
$\pi d^2 + \pi dh$

$\frac{1}{6}\pi d^3 + \frac{1}{4}\pi d^2 h$

$\frac{1}{6}\pi d^3 + \pi dh$

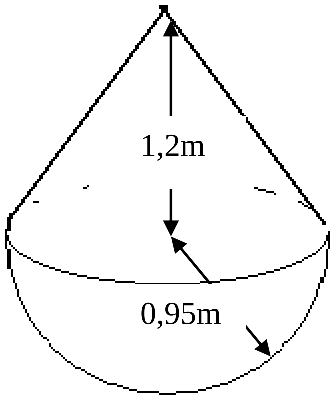
1) Nosaki, kura no izteiksmēm izsaka kapsulas tilpumu, pamato savu izvēli, neveicot aprēķinus!
2) Nosaki, kura izteiksme izsaka kapsulas virsmas laukumu!

4.uzdevums. (1.stunda)
Zīmējumā attēlots baznīcas modelis mērogā 1:50 ar visu smaili un pievienoti modeļa izmēri. Tornis ir cilindrveida, bet smaile – koniska. Zīmējumā torņa augstums ir 29cm, bet smailes augstums – 19cm.



1) Aprēķiniet modeļa tilpumu kubikcentimetros!
2) Atrodiet tilpumu attiecību baznīcas modelim un reālajai baznīcai!
3) Aprēķiniet reālās baznīvas tilpumu un pierakstiet atbildi kubikmetros!

5.uzdevums. (1.stunda)



Bojas, kas peld jūrā veidotas no plastikāta konusa veidā, konusa augstums ir 1,2m. Pamats, kas ir iegrimis ūdenī ir puslode formā, tās rādiuss ir 0,95m. Aprēķiniet bojas tilpumu!

6.uzdevums. (1.stunda).

Aprēķiniet, cik litru saldējuma nepieciešams, lai piepildītu ar saldējumu attēlā redzamo konusa formas glāzīti un puslodes formas saldējuma bumbu virs tās! Zināms, ka konusa pamata diametrs ir 4 cm, un konusa augstums ir 15 cm.

7.uzdevums. (2.stunda).

Artūrs iegādājās Ziemassvētku rotājumam 14 vienāda lieluma eglīšu bumbiņas. Lai tās varētu saglabāt līdz nākamajiem Ziemassvētkiem, Artūrs nolēma izgatavot cilindra veida kastīti (skat.attēlā) un savietot tajā visas bumbiņas. Kādi ir mazākie cilindriskās kastītes izmēri, ja katras bumbiņas diametrs ir 2cm.

8.uzdevums. (3.stunda)

Veicot 8.uzdevumu, skolēni:

1) sagatavo plakātu par vienu konkrētu ģeometrisko ķermeni: lodi, konusu, cilindru, prizmu, piramīdu.
2) grupā sadarbojas,
3) meklē informāciju par ievilktu un apvilktu ģeometrisko ķermeni.

Ieteikumi skolotājam

- Sadala klasi 5 grupās. Katrai grupai iedala vienu no ģeometriskajiem ķermeņiem: prizma, piramīda, cilindrs, konuss, lode.
- Katrai grupai jāsagatavo plakāts par iespēju doto ģeometrisko ķermeni ievilkt un apvilkt citiem ģeometriskajiem ķermeņiem.
- Katram grupā ir jābūt gatavam stāstīt par savu darbu 2 minūtes.
- Stundas sākumā vienojas par kritērijiem plakātam (skolēni paši var formulēt laba plakāta kritērijus):
    1. *Plakātā jābūt pareizam matemātikas saturam*
        - *jābūt attēlam ar katru no iespējām ievilkt un apvilkt doto ķermeni;*
        - *jāuzraksta nosacījumi, kad to var izdarīt;*
        - *jāuzraksta sakarības starp abu ķermeņu elementiem.*
    2. *Plakātam jābūt glīti un rūpīgi noformētam*
- Skolēni var izmantot matemātikas modeļus, informāciju pieejamajos mācību līdzekļos.
- Stundas beigās plakāti jāatstāj , skolotājam būtu nepieciešams pārskatīt matemātikas saturu, lai nākamajā stundā skolēni, izmantojot sagatavoto materiālu varētu izmantot, mācot citus skolēnus.

9.uzdevums (4.stunda).

Veicot 9.uzdevumu, skolēni:

1) mācās uzdot jautājumus;
2) attīsta matemātisko valodu;
3)veido pārskatu par ievilktiem un apvilktiem ģeometriskajiem ķermeņiem;
4) grupā sadarbojas.

Ieteikumi skolotājam

- Stundas sākumā katrai skolēnu grupai uzrakstīt 3, viņuprāt, labus jautājumus par savu uzdevumu. Tad grupa izvēlas vislabāko un skolotājs tos pieraksta uz tāfeles. Skolotājs komentē katru no jautājumiem un vēlreiz formulē, kādiem jābūt labiem jautājumiem. Šāda veida jautājumus skolēniem būs jāuzraksta arī par dzirdēto pie citiem plakātiem.
- Izvieto plakātus galerijā pie klases sienām. Viens no skolēniem rāda un stāsta, pārējie klausās citu grupu darbus. Katrs stāsta 1 reizi un mainās ik pēc 2 minūtēm. („galerijas" metode).
- Skolēni, vērojot plakātus un klausoties stāstījumu, formulē jautājumus par attiecīgo tematu.
- Visi atgriežas savās vietās.
- Pēc kārtas pie plakāta nostājas vēlreiz katra grupa, pārējie uzdod jautājumus.
- Stundas beigās katrs uz lapiņas uzraksta, viņaprāt, vislabāko un visinteresantāko jautājumu, kas tika uzdots klasē. Skolotājs savāc lapiņas un izvērtē, kas skolēnus ir interesējis visvairāk, iespējams, ka parādīsies jautājumi, kas skolotājam vēlreiz jāakcentē. Skolotājam šie jautājumi dos iespēju formatīvi izvērtēt darba rezultātu.

Darba lapa skolēniem

Atzīmē nosacījumus iespējai apvilkt un ievilkt dotos ķermeņus! Uzraksti jautājumu katrai grupai!

	Sfēra	Konuss	Cilindrs	Prizma	Piramīda	Jautājums
Sfēra						
Konuss						
Cilindrs						
Prizma						
Piramīda						

Veicot 10.-12.uzdevumu, skolēni:

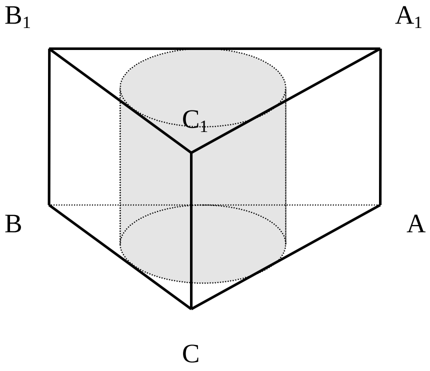
1) lieto iegūtās zināšanas par ķermeņu kombinācijām uzdevumu risināšanā.

10.uzdevums. (5.stunda).

Dāvanu kastītei ir kuba forma, tās sānu skaldnes mala ir 18cm gara. Vai šajā kastītē var iesaiņot bumbu, kuras tilpums ir 4500π cm3 ?

11.uzdevums. (5.stunda)

Koka klucītim ir taisnas trijstūra prizmas forma, kuras augstums ir 10 cm, bet pamats taisnleņķa trijstūris, kura īsākās malas ir 8 cm un 6 cm. No šī klucīša izgatavoja cilindru ar augstumu 10 cm un lielāko iespējamo tilpumu. Kāda daļa koksnes netika izmantota (rezultātu noapaļot līdz simtdaļām)?



Dots: taisna prizma $ABCA_1B_1C_1$

$\angle C=90^0$ BC = 6 cm, CA = 8 cm

Risinājums:

$V_{ABCA1B1C1} = S_{ABC} * BC = \frac{6*8}{2} * 10 = 240\,cm^3$

$BA=\sqrt{6^2+8^2}=10$

$R=\frac{6+8-10}{2}=2$

$V_{cilindram} = 3{,}14*4*10=125{,}6$

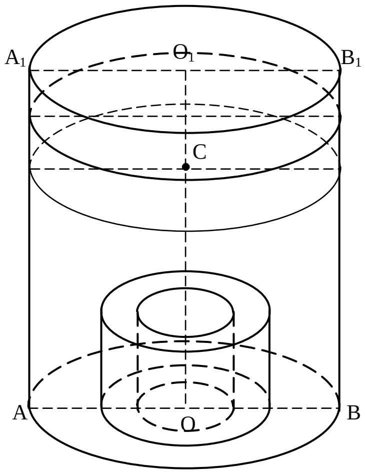
$V_{neizmantots} = V_{ABCA1B1C1} - V_{cilindram} = 240 - 125{,}6 = 114{,}4$

$V_{neizmantots} / V_{ABCA1B1C1} = \frac{114{,}4}{240} = 0{,}47(6) \approx 0{,}48$

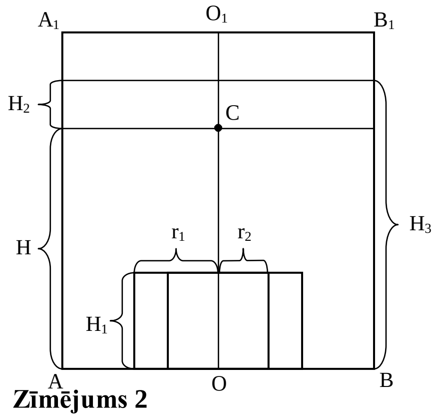
12.uzdevums. (5.stunda).

Cilindriskā traukā, kura diametrs D = 20 cm, ieliets ūdens augstumā H = 24 cm. Cik augstu tajā nostāsies ūdens, ja traukā iegremdē cilindrisku cauruli, kuras garums H_1 = 8 cm, bet šķērsgriezuma rādiusi ir r_1 = 5 cm, r_2 = 3 cm.

Norādījumi.



Zīmējums 1



Zīmējums 2

Pēc uzdevuma nosacījumiem AB = 20 cm, OC = H = 24 cm, H_1 = 8 cm, r_1 = 5 cm, r_2 = 3 cm.

$H_3 = H + H_2$.

Aprēķina $V_{CAURULEI}$.

No cilindra tilpuma formulas izsaka H_2.

Aprēķina H_3.

Risinājums.

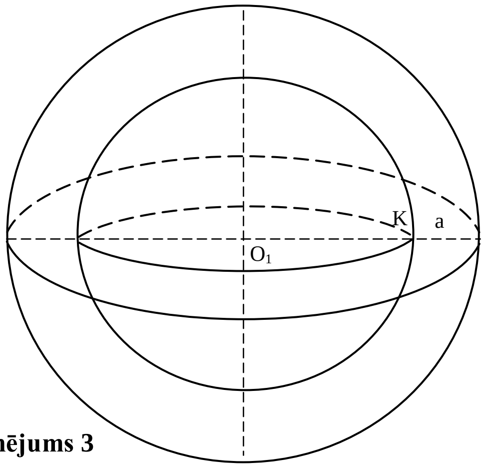
Pēc uzdevuma nosacījumiem AB = 20 cm, OC = H = 24 cm, H_1 = 8 cm, r_1 = 5 cm, r_2 = 3 cm. $H_3 = H + H_2$.

$V_{CAURULEI} = V_1 - V_2 = \pi \cdot H_1(r_1^2 - r_2^2) = \pi \cdot 8 \cdot (25 - 9) = 128 \cdot \pi$. $V_C = \pi \cdot 10^2 \cdot H_2$,

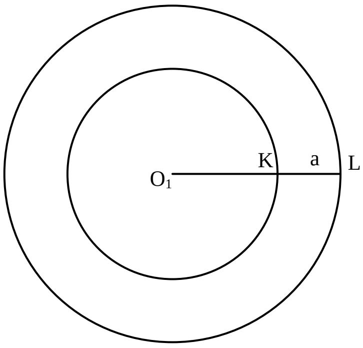
no kurienes $H_2 = \dfrac{128 \cdot \pi}{100 \cdot \pi} = 1{,}28$ (cm). H_3 = 24 + 1,28 = 25,28 (cm).

13.uzdevums (5.stunda)
No svina konusa, kura augstums H = 12 cm un pamata rādiuss R = 6 cm, jāizlej tukša lode, kuras sienu biezums a = 2 cm. Aprēķināt lodes ārējās virsmas rādiju.

Norādījumi.



Zīmējums 3



Zīmējums 4

Pēc uzdevuma nosacījumiem H = 12 cm, R = 6 cm, a = 2 cm.

$V_K = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H = 144\pi$ (cm^3).

Apzīmējam KL = a, $O_1L = R_1$, $O_1L = r_1$.

Aprēķina tukšas lodes tilpumu.

Tā kā kona tilpums ir vienāds ar tukšas lodes tilpumu, iegūst kvadrātvienādojumu.

Atrisinot šo kvadrātvienādojumu, iegūstR_1.

Risinājums.
Pēc uzdevuma nosacījumiem H = 12 cm, R = 6 cm, a = 2 cm.

$V_K = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H = 144\pi$ (cm^3).

Apzīmējam KL = a, $O_1L = R_1$, $O_1L = r_1$.

$$V_{TUKŠAI\,\text{LODEI}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (R_1^3 - r_1^3) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (R_1^3 - (R_1 - a)^3) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot R_1 + 3 \cdot a \cdot R_1^2)$$

Tā kā $V_K = V_{TUKŠAI\,\text{LODEI}}$, tad $4a\pi R_1^2 - 4a^2\pi R_1 + \frac{4}{3}a^3\pi - 144\pi = 0$.

Jeb $3R_1^2 - 6R_1 - 50 = 0$. Atrisinot šo kvadrātvienādojumu, iegūst 2 saknes, bet par atrisinājumu der tikai sakne $R_1 = \frac{3 + \sqrt{159}}{3}$.

Veicot 14.-15.uzdevumu, skolēni:

1) *praktiski izmantos iegūtās zināšanas par ievilktiem, apvilktiem ģeometriskiem ķermeņiem;*
2) *plānos uzdevuma risinājumu;*
3) *lietos trijstūru līdzību .*

Ieteikumi skolotājam:

- Var piedāvāt skolēniem vienu no uzdevumiem 14. vai 15.
- Uzdevumu var piedāvāt skolēniem darbam grupā vai pārī.
- Var piedāvāt skolēniem praktiski veikt uzdevumu, ja ir tādas iespējas.

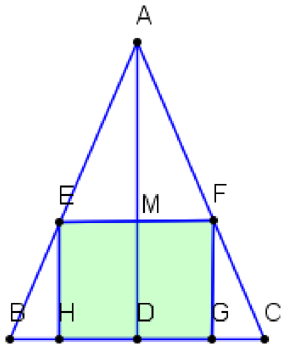
14.uzdevums. (6.stunda)

Darbmācības stundā katram 9.klases zēnam skolotājs iedeva koka kubu, kura šķautnes garums bija 20 cm un lūdza no tā izgrebt lodi. Kāds ir lielākās lodes tilpums, kuru var izveidot no šī kuba?

15.uzdevums.(6.stunda)

Virpotājam iedeva konusu un uzdeva no tā izvirpot cilindru tā, lai tiktu zaudēts vismazāk materiāla. Tā nu virpotājs aizdomājās par cilindra veidu: vai izvirpot tievu un garu, vai arī zemu un platu cilindru? Viņš nekādi nevarēja izdomāt, kādai jābūt formai, lai tilpums būtu vislielākais, t.i., tiktu zaudēts vismazāk materiāla.

Uzdevuma atrisinājums.



ABC – konusa aksiālšķēlums;
AD – konusa augstums, AD apzīmē ar h;
Pamata rādiuss BD = DC = R;
Cilindra aksiālšķēlums EFGH;
Cilindra pamata rādiuss HD = EM = r

Jāaprēķina attālums AM, t.i., kādā attālumā no konusa virsotnes jāatrodas cilindra pamatam, lai tilpums būtu vislielākais.
Apzīmē AM = x

$$\frac{ME}{BD} = \frac{AM}{AD}$$

$$\frac{r}{R} = \frac{x}{h} \Rightarrow r = \frac{Rx}{h}$$

Cilindra augstums MD = h – x

Tilpums $V = \pi\left(\frac{Rx}{h}\right)^2 (h - x) \Rightarrow \frac{Vh^2}{\pi R^2} = x^2 (h - x)$

Vienādības kreisajā pusē h, R un π ir konstantes, mainīgs ir tikai V. Tātad mums jāatrod tādu x, ar kādu V ir vislielākais. Tas būs vislielākais, ja $x^2 (h - x)$ būs vislielākais.
Mums ir trīs reizinātāji x, x un h – x. Reizinājums ir vislielākais, ja visi reizinātāji ir vienādi.
Reizinām abas vienādības puses ar 2, tad

$$\frac{2Vh^2}{\pi R^2} = x^2 (2h - 2x)$$

x +x + 2h – 2x = 2h, tātad x = 2h – 2x un $x = \frac{2h^2}{3}$

Cilindra pamatam ir jādala konusa augstums attiecībā 2:1.