ESF EIROPAS SOCIĀLAIS FONDS

EIROPAS SAVIENĪBA

IEGULDĪJUMS TAVĀ NĀKOTNĒ

LATVIJAS UNIVERSITĀTE ANNO 1919

PROFESIONĀLAJĀ IZGLĪTĪBĀ IESAISTĪTO VISPĀRIZGLĪTOJOŠO MĀCĪBU PRIEKŠMETU PEDAGOGU KOMPETENCES PAAUGSTINĀŠANA

Ināra Jermačenko

Funkcijas (Teorētiskais konspekts)

Materiāls izstrādāts
ESF Darbības programmas 2007. - 2013.gadam "Cilvēkresursi un nodarbinātība"
prioritātes 1.2. "Izglītība un prasmes"
pasākuma 1.2.1. "Profesionālās izglītības un vispārējo prasmju attīstība"
aktivitātes 1.2.1.2. "Vispārējo zināšanu un prasmju uzlabošana"
apakšaktivitātes 1.2.1.1.2. "Profesionālajā izglītībā iesaistīto pedagogu kompetences paaugstināšana"
Latvijas Universitātes realizētā projekta
"Profesionālajā izglītībā iesaistīto vispārizglītojošo mācību priekšmetu pedagogu kompetences paaugstināšana"
(Vienošanās Nr.2009/0274/1DP/1.2.1.1.2/09/IPIA/VIAA/003,
LU reģistrācijas Nr.ESS2009/88) īstenošanai.

Rīga, 2011.

PAMATELEMENTĀRĀS FUNKCIJAS

Definīcija. Mainīgo lielumu $\boldsymbol{y}$ sauc par mainīgā lieluma $\boldsymbol{x}$ ***funkciju*** un raksta $\boldsymbol{y = f(x)}$, ja pēc noteikta likuma $\boldsymbol{f}$ katrai $\boldsymbol{x}$ vērtībai, kas ņemta no kādas skaitļu kopas $\boldsymbol{X}$, atbilst tieši viena noteikta citas kopas $\boldsymbol{Y}$ vērtība $\boldsymbol{y}$.

$\boldsymbol{X}$ – funkcijas definīcijas apgabals, apzīmē $\boldsymbol{D(f)}$;
$\boldsymbol{Y}$ – funkcijas vērtību kopa, apzīmē $\boldsymbol{E(f)}$.

Ja $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}$ un $\boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}$, tad runā par ***reāla argumenta reālām funkcijām***, starp kurām nozīmīgu vietu ieņem ***pamatelementārās funkcijas*** :

- lineāra funkcija $\boldsymbol{y = kx + b}$;
- pakāpes funkcija $\boldsymbol{y = x^n}$, kur $\boldsymbol{n} \in \mathbb{R}$;
- eksponentfunkcija $\boldsymbol{y = a^x}$, kur $\boldsymbol{a > 0,\ a \neq 1}$;
- logaritmiskā funkcija $\boldsymbol{y = \log_a x}$, kur $\boldsymbol{a > 0,\ a \neq 1}$;
- trigonometriskās funkcijas $\boldsymbol{y = \sin x,\ \ y = \cos x,\ \ y = \operatorname{tg} x,\ \ y = \operatorname{ctg} x}$.

Ar ***elementārajām funkcijām*** saprot visas funkcijas, kuras var būt iegūtas no pamatelementārajām funkcijām, pielietojot galīga skaita reižu aritmētiskas darbības (t. i., saskaitīšanu, reizināšanu) un kompozīcijas.

Tā, piemēram, kvadrātfunkciju $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$ iegūst, pakāpes funkciju $\boldsymbol{y_1 = x^2}$ (kad $n = 2$) reizinot ar konstanti $\boldsymbol{a}$ ($\boldsymbol{a \neq 0}$) un pēc tam saskaitot ar lineāru funkciju $\boldsymbol{y_2 = bx + c}$.

Visas elementārās funkcijas var klasificēt pēc funkciju īpašībām:

- pāra un nepāra funkcijas;
- periodiskas un neperiodiskas funkcijas;
- monotonas (augošas, dilstošas, konstantas) un nemonotonas funkcijas;
- ierobežotas un neierobežotas funkcijas.

Tā, piemēram, funkcija $\boldsymbol{f(x) = \sin x}$ definēta visiem reāliem skaitļiem, tā ir nepāra, periodiska (ar periodu $T = 2\pi$), nemonotona funkcija, kurai eksistē augšanas un dilšanas intervāli, pie tam tā ir ierobežota funkcija, jo tās vērtību kopa ir ierobežots intervāls $\boldsymbol{E(f) = [-1;\ 1]}$.

Funkcija $\boldsymbol{g(x) = \lg x}$ definēta tikai pozitīviem reāliem skaitļiem, tā nav ne pāra, ne nepāra funkcija, tā ir neperiodiska, augoša (tā kā bāze $10 > 1$) un neierobežota funkcija, jo tās vērtību kopa ir neierobežots intervāls $\boldsymbol{E(g) = (-\infty;\ +\infty)}$.

Uzdevums.
Katru no pamatelementārajām funkcijām raksturot pēc tās īpašībām; shematiski uzskicēt funkcijas grafiku.

SALIKTA FUNKCIJA

Ja dota funkcija $\boldsymbol{y = f(x)}$, tad pieraksts $\boldsymbol{y = f(a)}$, $\boldsymbol{y = f(a+3)}$, $\boldsymbol{y = f\left(\frac{1}{x^2}\right)}$ nozīmē to, ka visas matemātiskās darbības, kas paredzētas funkcijas $\boldsymbol{f}$ formulā, ir jāveic nevis ar argumentu $\boldsymbol{x}$, bet gan atbilstoši ar $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a+3}$, $\boldsymbol{\frac{1}{x^2}}$.

Ar šādu mainīgā aizstāšanu ar citu izteiksmi ir saistīts ***saliktas funkcijas*** jēdziens.

Definīcija. Ja dotas funkcijas $\boldsymbol{h = f(y)}$ un $\boldsymbol{y = g(x)}$, tad funkciju $\boldsymbol{h = f\big(g(x)\big)}$ sauc par ***saliktu funkciju*** jeb funkciju $\boldsymbol{f}$ un ***g kompozīciju***.

$\boldsymbol{g}$ - saliktas funkcijas ***iekšējā funkcija***; $\boldsymbol{f}$ - saliktas funkcijas ***ārējā funkcija***.

Piemēram, $\boldsymbol{y = f(x) = x^2 + x}$.
Tad $\boldsymbol{f(a) = a^2 + a}$;
$\boldsymbol{f(a+3) = (a+3)^2 + (a+3) = a^2 + 7a + 12}$;
$\boldsymbol{f\left(\frac{1}{x^2}\right) = \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^2}}$.

$\boxed{\textit{salikta funkcija}} \leftrightarrow \boxed{\textit{funkcija no funkcijas}}$

Katru saliktu funkciju var izteikt kā pamatelementāro funkciju kompozīciju:
- funkcija $\boldsymbol{y = \sqrt{3-2x}}$ ir iegūta no funkcijām $\boldsymbol{f(t) = \sqrt{t}}$ un $\boldsymbol{t(x) = 3 - 2x}$, šeit kvadrātsaknes funkcija $\boldsymbol{f}$ ir ārējā funkcija un tās arguments $\boldsymbol{t}$ ir lineāra funkcija (iekšējā funkcija);
- funkcija $\boldsymbol{y = \lg(\sin x)}$ ir iegūta no funkcijām $\boldsymbol{g(u) = \lg u}$ un $\boldsymbol{u(x) = \sin x}$, šeit logaritmiskā funkcija $\boldsymbol{g}$ ir ārējā funkcija un tās arguments $\boldsymbol{u}$ ir trigonometriskā funkcija (iekšējā funkcija).

Funkciju kompozīcija var būt arī sarežģītāka:
- funkcija $\boldsymbol{y = \frac{2}{\cos^3 x}}$ ir iegūta no funkcijām $\boldsymbol{f(u) = \frac{2}{u}}$, $\boldsymbol{u(t) = t^3}$ un $\boldsymbol{t(x) = \cos x}$, līdz ar to funkcija ir uzrakstīta kā triju funkciju kompozīcija $\boldsymbol{y = f\Big(u\big(t(x)\big)\Big)}$.

1. uzdevums. Izteikt dotās saliktas funkcijas kā pamatelementāro funkciju kompozīciju:
a) $y = \sin 2x$

b) $y = 3^{x^2-2x}$

c) $y = \log_2 \sqrt{2x+1}$

Ja dotas funkcijas $\boldsymbol{f(x)}$ un $\boldsymbol{g(x)}$ un no tām tiek veidota salikta funkcija, tad ***būtiski*** ir tas, ***kura funkcija ir ārējā*** un ***kura iekšējā funkcija***.
Saliktas funkcijas $\boldsymbol{y = f\big(g(x)\big)}$ un $\boldsymbol{y = g\big(f(x)\big)}$ parasti ir ***atšķirīgas***.

1. piemērs. Dotas funkcijas $\boldsymbol{f(x) = 2x+3}$ un $\boldsymbol{g(x) = x^2 - 1}$.
Uzrakstīt funkcijas $y = f\big(g(x)\big)$, $y = g\big(f(x)\big)$, $y = f\big(f(x)\big)$, $y = g\big(g(x)\big)$.
a) $y = f\big(g(x)\big) = 2(x^2-1)+3 = 2x^2+1$;
b) $y = g\big(f(x)\big) = (2x+3)^2 - 1 = 4x^2 + 12x + 8$;
c) $y = f\big(f(x)\big) = 2(2x+3)+3 = 4x+9$;
d) $y = g\big(g(x)\big) = (x^2-1)^2 - 1 = x^4 - 2x^2$.

2. uzdevums. Dotas funkcijas
$f(x) = \log_{0.5} x$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = 3x+1$.
Uzrakstīt saliktas funkcijas:
a) $y = f\big(h(x)\big) =$
b) $y = h\big(g(x)\big) =$
c) $y = f\Big(g\big(h(x)\big)\Big) =$
aprēķināt
a) $f\big(h(1)\big) =$
b) $h\big(g(4)\big) =$
c) $f\Big(g\big(h(1)\big)\Big) =$

SALIKTAS FUNKCIJAS DEFINĪCIJAS APGABALS

Lai noteiktu saliktas funkcijas definīcijas apgabalu, ir jāskatās, kādas ir prasības ***ārējās funkcijas definīcijas apgabalam***.

2. piemērs. Noteikt funkcijas $y = \sqrt{\log_{0.2}(3-x)}$ definīcijas apgabalu.
Atrisinājums. $x \quad \rightarrow \quad 3-x \quad \rightarrow \quad \log_{0.2}(3-x) \quad \rightarrow \quad \sqrt{\log_{0.2}(3-x)}$
Ārējā funkcija ir kvadrātsaknes funkcija, tā definēta nenegatīviem skaitļiem, tātad

$$\boldsymbol{D(y):} \log_{0.2}(3-x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < 3-x \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x \in [2;\, 3)}.$$

3. piemērs. Noteikt funkcijas $y = \dfrac{2}{\cos x - 1}$ definīcijas apgabalu.
Atrisinājums. $x \quad \rightarrow \quad \cos x \quad \rightarrow \quad \cos x - 1 \quad \rightarrow \quad \dfrac{2}{\cos x - 1}$
Ārējā funkcija ir apgrieztās proporcionalitātes funkcija, tā ir definēta, ja saucējs ir atšķirīgs no nulles, tātad

$$\boldsymbol{D(y):} \cos x - 1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x \neq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x \neq 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}}.$$

3. uzdevums.
Noteikt dotās funkcijas definīcijas apgabalu:
a) $y = \dfrac{1}{\log_2(x+2)}$

b) $y = \sqrt{2^{x^2} - 4}$

c) $y = \lg(\sin 2x)$

SALIKTAS FUNKCIJAS VĒRTĪBU KOPA

Lai noteiktu saliktas funkcijas vērtību kopu, ir jāskatās, kāda ir ***iekšējās funkcijas vērtību kopa***.

4. piemērs. Noteikt funkcijas $y = 4\cos x + 3$ vērtību kopu.
Atrisinājums. $x \quad \rightarrow \quad \cos x \quad \rightarrow \quad 4\cos x \quad \rightarrow \quad 4\cos x + 3$
Iekšējā funkcija ir kosinusa funkcija, tā pieņem vērtības no intervāla $[-1;\, 1]$, tātad
$\boldsymbol{E(y):} -1 \leq \cos x \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -4 \leq 4\cos x \leq 4 \quad \Leftrightarrow \quad -4+3 \leq 4\cos x + 3 \leq 4+3 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{y \in [-1;\, 7]}$.

5. piemērs. Noteikt funkcijas $y = 2^{x^2} - 4$ vērtību kopu.
Atrisinājums. $x \quad \rightarrow \quad x^2 \quad \rightarrow \quad 2^{x^2} \quad \rightarrow \quad 2^{x^2} - 4$
Iekšējā funkcija ir kvadrātfunkcija, tā pieņem vērtības no intervāla $[0;\, +\infty)$, tātad
$\boldsymbol{E(y):} x^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{x^2} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{x^2} - 4 \geq 1 - 4 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{y \in [-3;\, +\infty)}$.

4. uzdevums.
Noteikt dotās funkcijas vērtību kopu:
a) $y = 3\sin^2 x$

b) $y = 2 - 0.5^{|x|}$

c) $y = \dfrac{1}{x^2+4}$

INVERSĀ FUNKCIJA

Definīcija. Ja katram skaitlim $\boldsymbol{y_0}$ no funkcijas $\boldsymbol{y = f(x)}$ vērtību apgabala $\boldsymbol{E(f)}$ pēc noteikta likuma $\boldsymbol{\varphi}$ atbilst tikai viena vienīga x vērtība $\boldsymbol{x_0}$ no funkcijas $\boldsymbol{f}$ definīcijas apgabala $\boldsymbol{D(f)}$ un tieši tā, kurai $\boldsymbol{f(x_0) = y_0}$, tad saka, ka $\boldsymbol{y = f(x)}$ ir ***apvēršama funkcija***, un $\boldsymbol{x = \varphi(y)}$ sauc par funkcijas $\boldsymbol{y = f(x)}$ ***inverso funkciju***.

No definīcijas izriet, ka dotās funkcijas $\boldsymbol{f}$ vērtību apgabals ir inversās funkcijas $\boldsymbol{\varphi}$ definīcijas apgabals un otrādi, dotās funkcijas definīcijas apgabals ir inversās funkcijas vērtību apgabals.

$\boxed{\boldsymbol{D(\varphi) = E(f)}}$ un $\boxed{\boldsymbol{E(\varphi) = D(f)}}$

Ne katrai funkcijai visā tās definīcijas apgabalā eksistē inversā funkcija. Būtisks inversās funkcijas eksistences noteikums (ka katrai $\boldsymbol{y}$ vērtībai atbilst tikai viena argumenta $\boldsymbol{x}$ vērtība) ir spēkā tikai monotonām funkcijām.

Ja funkcija $\boldsymbol{f}$ ir monotona kādā intervālā $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$ un tas vērtību apgabals ir $[\boldsymbol{c}; \boldsymbol{d}]$, tad intervālā $[\boldsymbol{c}; \boldsymbol{d}]$ tai eksistē inversā funkcija $\boldsymbol{\varphi}$, kas arī ir monotona.

Inversās funkcijas atrašanas algoritms:
- pārliecināties, vai funkcija $\boldsymbol{y = f(x)}$ ir monotona, vai arī noteikt šīs funkcijas monotonitātes intervālus;
- noteikt dotās funkcijas vērtību apgabalu (katram monotonitātes intervālam);
- no izteiksmes $\boldsymbol{y = f(x)}$ izteikt mainīgo $\boldsymbol{x}$, iegūstot funkciju $\boldsymbol{x = \varphi(y)}$;
- mainot vietām mainīgos $\boldsymbol{x}$ un $\boldsymbol{y}$, uzrakstīt inversās funkcijas formulu $\boldsymbol{y = \varphi(x)}$.

6. piemērs. Uzrakstīt funkcijai $y = f(x) = 2x + 3$ inverso funkciju.
Atrisinājums.
1) Dotā funkcija ir augoša (t.i., monotona) visā savā definīcijas apgabalā $D(f) = (-\infty; +\infty)$, tātad tai eksistē inversā funkcija;
2) $E(f) = (-\infty; +\infty)$;
3) no izteiksmes $y = 2x + 3$ izsakām $x = \dfrac{y-3}{2}$;
4) pēdējā vienādībā mainot vietām x un y, iegūstam $y = \dfrac{x-3}{2}$, tātad inversā funkcija ir $\underline{\varphi(x) = \dfrac{x-3}{2}}$.

5. uzdevums. Konstruēt funkciju $f(x) = 2x + 3$ un $\varphi(x) = \dfrac{x-3}{2}$ grafikus, noskaidrot to savstarpējo novietojumu koordinātu plaknē.

7. piemērs. Uzrakstīt funkcijai $y = f(x) = 1 - \dfrac{2}{x}$ inverso funkciju.

Atrisinājums.

1) Dotā funkcija ir dilstoša (t.i., monotona) visā savā definīcijas apgabalā
$D(f) = (-\infty;\ 0)\bigcup(0;\ +\infty)$, tātad tai eksistē inversā funkcija;

2) tā kā $\dfrac{2}{x} \neq 0$, tad $1 - \dfrac{2}{x} \neq 1$ un tātad $E(f) = (-\infty;\ 1)\bigcup(1;\ +\infty)$;

3) no izteiksmes $y = 1 - \dfrac{2}{x}$ izsakām $x = \dfrac{2}{1-y}$;

4) pēdējā vienādībā mainot vietām x un y, iegūstam $y = \dfrac{2}{1-x}$, tātad inversā funkcija ir
$\underline{\varphi(x) = \dfrac{2}{1-x}}$. Pārliecināmies, ka $D(\varphi) = (-\infty;\ 1)\bigcup(1;\ +\infty) = E(f)$, kā arī
$E(\varphi) = (-\infty;\ 0)\bigcup(0;\ +\infty) = D(f)$.

---

8. piemērs. Uzrakstīt funkcijai $y = f(x) = x^2$ inverso funkciju.

Atrisinājums.

1) Dotā funkcija nav monotona visā savā definīcijas apgabalā, tātad tai neeksistē inversā funkcija.
Bet, tā kā dotajai funkcijai eksistē monotonitātes intervāli, tad var apskatīt 2 gadījumus:
a) funkcija aug, ja $x \geq 0$, t.i., $D(f_1) = [0;\ +\infty)$
b) funkcija dilst, ja $x \leq 0$, t.i., $D(f_2) = (-\infty;\ 0]$;

2) $E(f_1) = E(f_2) = [0;\ +\infty)$;

3) no izteiksmes $y = x^2$ izsakām $x = \pm\sqrt{y}$;

4) a) ja $x \geq 0$, tad pēdējā vienādībā mainot vietām x un y, iegūstam $y = \varphi_1(x) = \sqrt{x}$;
b) ja $x \leq 0$, tad pēdējā vienādībā mainot vietām x un y, iegūstam $y = \varphi_2(x) = -\sqrt{x}$.

__Atbilde:__ ja $x \geq 0$, tad funkcijai $f(x) = x^2$ inversā funkcija ir $\varphi(x) = \sqrt{x}$;
ja $x \leq 0$, tad funkcijai $f(x) = x^2$ inversā funkcija ir $\varphi(x) = -\sqrt{x}$.

Ja dotā funkcija ir augoša (dilstoša), tad arī tai inversā funkcija ir augoša (dilstoša). (Skat. 8. piem.)

Divu savstarpēji inversu funkciju $\boldsymbol{y = f(x)}$ un $\boldsymbol{y = \varphi(x)}$ grafiki ir simetriski attiecībā pret taisni $\boldsymbol{y = x}$.

6. uzdevums.

Uzrakstīt dotajai funkcijai inverso funkciju:

$y = \dfrac{1}{x}$

$y = \dfrac{x}{x-1}$

$y = x^2 - 4$, ja $x \geq 0$

$y = \sqrt{x} + 2$

$y = 2^x$

$y = \log_3 x$