Armands Gricāns

Rotācijas ķermeņi (teorētiskais konspekts)

Materiāls izstrādāts
ESF Darbības programmas 2007. - 2013.gadam “Cilvēkresursi un nodarbinātība”
prioritātes 1.2. “Izglītība un prasmes”
pasākuma 1.2.1. “Profesionālās izglītības un vispārējo prasmju attīstība”
aktivitātes 1.2.1.2. “Vispārējo zināšanu un prasmju uzlabošana”
apakšaktivitātes 1.2.1.1.2. “Profesionālajā izglītībā iesaistīto pedagogu kompetences paaugstināšana”
Latvijas Universitātes realizētā projekta
“Profesionālajā izglītībā iesaistīto vispārizglītojošo mācību priekšmetu pedagogu kompetences paaugstināšana”
(Vienošanās Nr.2009/0274/1DP/1.2.1.1.2/09/IPIA/VIAA/003,
LU reģistrācijas Nr.ESS2009/88) īstenošanai.

Rīga, 2011.

Definīcija. Par ***rotācijas ķermeni*** sauc telpisko ķermeni, kas rodas, ierobežotai plaknes figūrai rotējot ap taisni, kas atrodas tajā pašā plaknē. Šo taisni sauc par ***rotācijas asi***.

Definīcija. Par ***rotācijas virsmu*** sauc virsmu, kas rodas, ja kāda līnija rotē ap asi, kas atrodas tajā pašā plaknē. Šo līniju sauc par ***veiduli***.

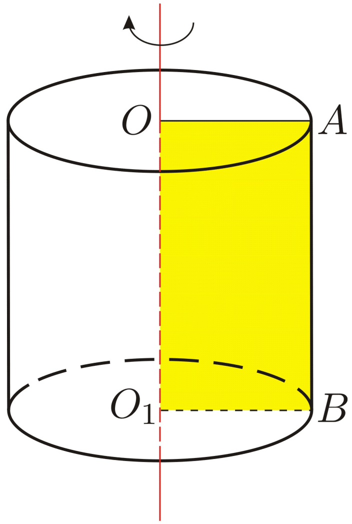
Definīcija. Rotācijas ķermeņa šķēlumu ar plakni, kas vilkta caur rotācijas asi, sauc par tā ***aksiālšķēlumu***.

Kādi rotācijas ķermeņi un kādas rotācijas virsmas ir sastopamas dabā, sadzīvē; uzraksti piemērus.

CILINDRS

Definīcija. Par ***cilindru*** **sauc rotācijas ķermeni, kas izveidojas, taisnstūrim rotējot ap asi, uz kuras atrodas taisnstūra mala**.

- Taisne $\boldsymbol{OO_1}$ - cilindra ass;
- rotējoša taisnstūra mala $\boldsymbol{AB}$ - cilindra veidule $\boldsymbol{\ell}$;
- cilindra veidule $\boldsymbol{AB}$, rotējot ap asi $\boldsymbol{OO_1}$, izveido ***cilindrisku virsmu***, ko sauc par ***cilindra sānu virsmu***;
- taisnstūra malas $\boldsymbol{OA}$ un $\boldsymbol{O_1B}$ rotācijas rezultātā izveido 2 vienādus riņķus, ko sauc par ***cilindra pamatiem***;
- cilindra pamati atrodas paralēlās plaknēs;
- $\boldsymbol{OA} = \boldsymbol{O_1B} = \boldsymbol{R}$ - cilindra pamata rādiuss;
- pamatiem perpendikulāru nogriezni ar galapunktiem cilindra pamatos sauc par ***cilindra augstumu***;
- nogrieznis $\boldsymbol{OO_1}$ - cilindra augstums $\boldsymbol{H}$;
- cilindram veidules un augstuma garumi ir vienādi $\boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{H}$;
- veidule ir perpendikulāra cilindra pamatiem.



1. zīm.

Šķeļot cilindru ar plakni, kas iet caur asi $\boldsymbol{OO_1}$, iegūst ***cilindra aksiālšķēlumu***. Cilindra aksiālšķēlums ir taisnstūris. (Uzzīmē to, papildinot 1. zīmējumu)

1.uzdevums.
Aprēķināt cilindra aksiālšķēluma laukumu, ja cilindra pamata rādiuss ir 4 m, bet augstums ir 6 m.

2.uzdevums.
Cilindra aksiālšķēlums ir kvadrāts, kura diagonāle ir vienāda ar 20 cm. Aprēķināt
a) cilindra pamata laukumu;
b) cilindra aksiālšķēluma laukumu.

CILINDRA VIRSMAS LAUKUMA APRĒĶINĀŠANA

Iedomāsimies, ka cilindra virsma pārgriezta pa veiduli $\boldsymbol{AB}$ un pamatu riņķa līnijām. Izklājot šo virsmu vienā plaknē, iegūst cilindra izklājumu (skat. 2. zīm.)

Taisnstūri $\boldsymbol{ABB_1A_1}$ sauc par cilindra ***sānu virsmas*** izklājumu plaknē.

$$\boxed{S_{\text{sānu}} = 2\pi\, R\, H},$$

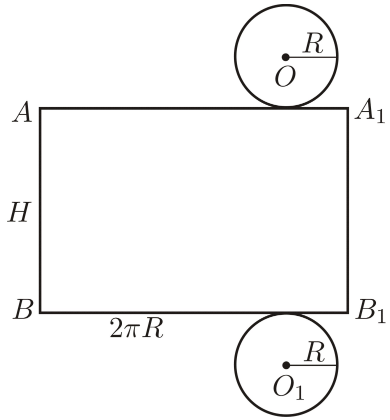
kur $\boldsymbol{R}$ - cilindra pamata rādiuss,

$\boldsymbol{H}$ - cilindra augstums.

Ar cilindra ***pilnas virsmas laukumu*** saprot cilindra sānu virsmas laukuma un abu pamatu laukumu summu.

$$\boxed{S_{\text{pilna}} = S_{\text{sānu}} + 2\, S_{\text{pam.}}},$$

$$\boxed{S_{\text{pilna}} = 2\pi\, R\, H + 2\pi\, R^2}.$$



2. zīm.

CILINDRA TILPUMA APRĒĶINĀŠANA

Cilindra tilpums ir vienāds ar cilindra pamata laukuma un augstuma reizinājumu:

$$\boxed{V = S_{\text{pam.}} \cdot H},$$

$$\boxed{V = \pi\, R^2\, H}.$$

3.uzdevums.
Taisnstūra malas ir $\boldsymbol{a}$ un $\boldsymbol{b}$, $(\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b})$. Taisnstūris rotē ap savu malu. Vai rotācijas ķermeņa sānu virsmas laukums ir atkarīgs no tā, ap kuru no malām taisnstūris rotē?

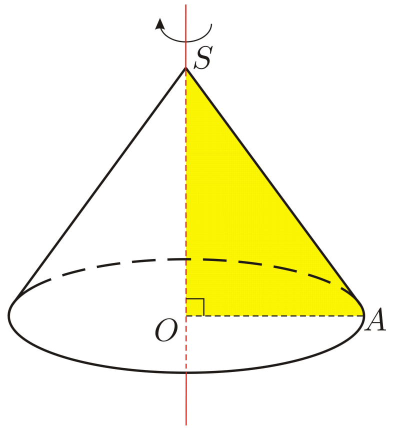
4.uzdevums.
Cilindra sānu virsmas izklājums ir kvadrāts ar malu 10 cm. Aprēķināt cilindra pilnas virsmas laukumu.

5.uzdevums.
Doti 2 cilindri. To augstumu attiecība ir 1 : 3, bet pamatu rādiusu attiecība ir 2 : 1. Kura cilindra tilpums ir lielāks?

6.uzdevums.
Cilindra augstums ir par 10 cm lielāks nekā pamata rādiuss. Pilnas virsmas laukums ir 200π cm^2. Aprēķināt cilindra tilpumu.

Definīcija. Par ***konusu*** **sauc rotācijas ķermeni, kas izveidojas, taisnleņķa trijstūrim rotējot ap asi, uz kuras atrodas trijstūra katete**.

- Taisne $\boldsymbol{SO}$ - konusa ass;
- $\boldsymbol{S}$ - konusa virsotne;
- hipotenūza $\boldsymbol{SA}$ - konusa veidule $\boldsymbol{\ell}$;
- veidule $\boldsymbol{SA}$, rotējot ap asi $\boldsymbol{SO}$, izveido ***konisku virsmu***, ko sauc par ***konusa sānu virsmu***;
- katete $\boldsymbol{OA}$ rotācijas rezultātā izveido riņķi - ***konusa pamatu***;
- $\boldsymbol{OA = R}$ - pamata rādiuss;
- pamatam perpendikulāru nogriezni, kas novilkts no konusa virsotnes, ar galapunktu konusa pamatā sauc par ***konusa augstumu***;
- augstums sakrīt ar trijstūra kateti, kas atrodas uz konusa ass;
- $\boldsymbol{SO = H}$ - konusa augstums ;
- konusa augstumam, pamata rādiusam un veidulei ir spēkā sakarība $\boldsymbol{H^2 + R^2 = \ell^2}$.



3. zīm.

Šķeļot konusu ar plakni, kas iet caur asi $\boldsymbol{SO}$, iegūst ***konusa aksiālšķēlumu***. Konusa aksiālšķēlums ir vienādsānu trijstūris, kura malu garumi ir $\boldsymbol{2R}$, $\boldsymbol{\ell}$ un $\boldsymbol{\ell}$. (Uzzīmē to, papildinot 3. zīmējumu)

Ja šķēlējplakne ir perpendikulāra konusa asij $\boldsymbol{SO}$ (t.i., ir paralēla konusa pamatam), tad konusa šķēlums ar šo plakni ir riņķis ar centru punktā, kas atrodas uz rotācijas ass.

Ja šķēlējplakne iet caur konusa virsotni, bet nesatur rotācijas asi, tad konusa šķēlums ar šo plakni ir vienādsānu trijstūris, kura sānu malas ir vienādas ar $\boldsymbol{\ell}$ un pamata garums ir <u>mazāks</u> par $\boldsymbol{2R}$; bet speciālos gadījumos var būt veidule vai punkts. (Shematiski uzzīmē atbilstošos zīmējumus.)

7.uzdevums.
Konusa veidule ir 10 cm, augstums - 6 cm. Aprēķināt konusa pamata rādiusu un aksiālšķēluma laukumu.

8.uzdevums.
Konusa augstums ir $4\sqrt{3}$ cm. Kādā attālumā no virsotnes jānovelk pamatam paralēla plakne, lai šķēluma laukums būtu viena trešdaļa no pamata laukuma?

9.uzdevums.
Konusa augstuma garums ir 3 cm, bet pamata rādiusa garums ir 4 cm. Caur divām konusa veidulēm novilkta plakne, kas atšķeļ no pamata riņķa līnijas 120^o loku. Aprēķināt šķēluma laukumu.

KONUSA VIRSMAS LAUKUMA APRĒĶINĀŠANA

Konusa sānu virsmas izklājums ir riņķa sektors, kura rādiuss ir vienāds ar konusa veiduli $\boldsymbol{\ell}$, bet sektora loka garums - ar konusa pamata riņķa līnijas garumu.

$$\boxed{\boldsymbol{S}_{\text{sānu}} = \boldsymbol{\pi}\, \boldsymbol{R}\, \boldsymbol{\ell}},$$

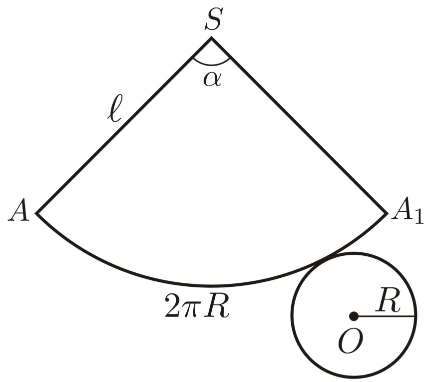
kur $\boldsymbol{R}$ - konusa pamata rādiuss, $\boldsymbol{\ell}$ - veidule.

Ar konusa ***pilnas virsmas laukumu*** saprot konusa sānu virsmas laukuma un pamata laukuma summu.

$$\boxed{\boldsymbol{S}_{\text{kon.}} = \boldsymbol{S}_{\text{sānu}} + \boldsymbol{S}_{\text{pam.}}},$$

$$\boxed{\boldsymbol{S}_{\text{kon.}} = \boldsymbol{\pi}\, \boldsymbol{R}\, \boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{\pi}\, \boldsymbol{R}^2},$$

$$\boxed{\boldsymbol{S}_{\text{kon.}} = \boldsymbol{\pi}\, \boldsymbol{R}(\boldsymbol{\ell} + \boldsymbol{R})}.$$



4. zīm.

KONUSA TILPUMA APRĒĶINĀŠANA

Konusa tilpums ir vienāds ar pamata laukuma un augstuma reizinājuma trešdaļu:

$$\boxed{\boldsymbol{V} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{3}} \boldsymbol{S}_{\text{pam.}} \cdot \boldsymbol{H}};$$

$$\boxed{\boldsymbol{V} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{3}} \boldsymbol{\pi}\, \boldsymbol{R}^2\, \boldsymbol{H}}.$$

10.uzdevums.
Konusa aksiālšķēlums ir regulārs trijstūris. Aprēķināt konusa pilnas virsmas laukumu, ja tā pamata rādiuss ir R.

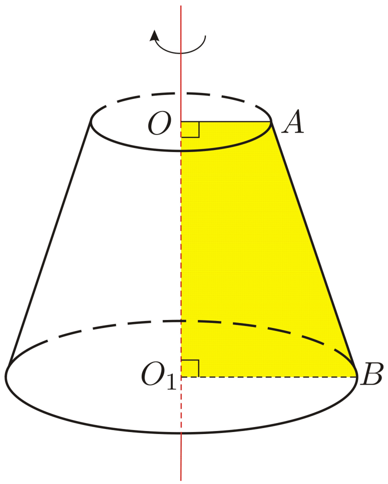
11.uzdevums.
Konusa veidules garums ir 5 cm, bet pamata riņķa līnijas garums ir 6π cm. Aprēķināt konusa tilpumu.

12.uzdevums.
Konusa augstuma un veidules attiecība ir $4 : 5$, bet tā tilpums ir 324π cm^3. Aprēķināt pilnas virsmas laukumu.

NOŠĶELTS KONUSS

Definīcija. Par ***nošķeltu konusu*** **sauc rotācijas ķermeni, kas izveidojas, taisnleņķa trapecei rotējot ap asi, uz kuras atrodas īsākā sānu mala**.

- Taisne $\boldsymbol{OO_1}$ - nošķelta konusa ass;
- trapeces garākā sānu mala $\boldsymbol{AB}$ - nošķelta konusa veidule $\boldsymbol{\ell}$;
- veidule $\boldsymbol{AB}$, rotējot ap asi $\boldsymbol{OO_1}$, izveido ***nošķelta konusa sānu virsmu***;
- trapeces malas $\boldsymbol{OA}$ un $\boldsymbol{O_1B}$ rotācijas rezultātā izveido 2 riņķus, ko sauc par ***nošķelta konusa pamatiem***;
- nošķelta konusa pamati atrodas paralēlās plaknēs;
- $\boldsymbol{OA} = \boldsymbol{r}$ - nošķelta konusa augšējā pamata rādiuss;
- $\boldsymbol{O_1B} = \boldsymbol{R}$ - nošķelta konusa apakšējā pamata rādiuss;
- pamatiem perpendikulāru nogriezni ar galapunktiem šajos pamatos sauc par ***nošķelta konusa augstumu***;
- nogrieznis $\boldsymbol{OO_1} = \boldsymbol{H}$ - nošķelta konusa augstums, tas sakrīt ar trapeces īsāko sānu malu jeb trapeces augstumu.



5. zīm.

Šķeļot nošķeltu konusu ar plakni, kas iet caur asi $\boldsymbol{OO_1}$, iegūst ***nošķelta konusa aksiālšķēlumu***. Nošķelta konusa aksiālšķēlums ir vienādsānu trapece, kuras sānu malu garums ir vienāds ar $\boldsymbol{\ell}$, un pamati $\boldsymbol{2r}$ un $\boldsymbol{2R}$. (Uzzīmē to, papildinot 5. zīmējumu)

13.uzdevums.
Nošķelta konusa pamatu laukumi ir $64\,\pi$ cm^2 un $225\,\pi$ cm^2, bet augstums ir $4\sqrt{15}$ cm. Aprēķināt veidules garumu.

14.uzdevums.
Nošķelta konusa veidule, kuras garums ir 30 cm, veido ar pamata plakni 45^o leņķi. Lielākā pamata rādiuss ir $20\sqrt{2}$ cm. Aprēķināt
a) mazākā pamata rādiusu;
b) aksiālšķēluma diagonāli;
c) aksiālšķēluma laukumu.

15.uzdevums.
Nošķelta konusa pamatu rādiusi ir 1 m un 7 m. Šis konuss šķelts ar pamatiem paralēlu plakni. Šķēluma laukums ir $25\,\pi$ m^2. Kādās daļās šis šķēlums sadala augstumu?

NOŠĶELTA KONUSA VIRSMAS LAUKUMA APRĒĶINĀŠANA

Iedomāsimies, ka nošķelta konusa virsma pārgriezta pa veiduli $\boldsymbol{AB}$ un pamatu riņķa līnijām. Izklājot šo virsmu vienā plaknē, iegūst nošķelta konusa izklājumu (skat. 6. zīm.)

Nošķelta konusa sānu virsmas laukums ir vienāds ar tā pamatu riņķa līniju garumu pussummas un veidules reizinājumu:

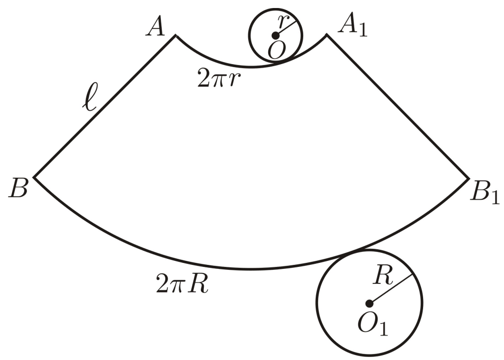
$$\boxed{\boldsymbol{S_{\text{sānu}} = \pi(r + R)\ell}},$$

Ar nošķelta konusa ***pilnas virsmas laukumu*** saprot tā sānu virsmas laukuma un abu pamatu laukumu summu.

$$\boxed{\boldsymbol{S_{\text{pilna}} = S_{\text{sānu}} + S_{1\text{pam.}} + S_{2\text{pam.}}}},$$

$$\boxed{\boldsymbol{S_{\text{pilna}} = \pi(r + R)\ell + \pi\, r^2 + \pi\, R^2}},$$

$$\boxed{\boldsymbol{S_{\text{pilna}} = \pi\left((r + R)\ell + r^2 + R^2\right)}}.$$



6. zīm.

NOŠĶELTA KONUSA TILPUMA APRĒĶINĀŠANA

Nošķelta konusa tilpumu var aprēķināt, izmantojot formulu :

$$\boxed{\boldsymbol{V = \frac{1}{3}\pi\, H\left(r^2 + R^2 + rR\right)}},$$

kur $\boldsymbol{H}$ - nošķelta konusa augstums, bet $\boldsymbol{r}$ un $\boldsymbol{R}$ attiecīgi augšējā un apakšējā pamata rādiusi.

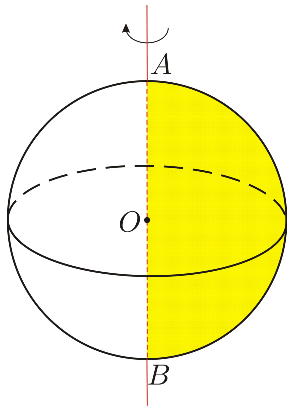
16.uzdevums.
Taisnleņķa trapece, kuras augstums ir 4 m, bet pamati 3 m un 6 m, rotē ap īsāko sānu malu. Aprēķināt iegūtā rotācijas ķermeņa sānu virsmas laukumu un pilnas virsmas laukumu.

17.uzdevums.
Nošķelta konusa pilnas virsmas laukums ir 572π dm^2, bet pamatu rādiusi 6 dm un 14 dm. Aprēķināt nošķelta konusa augstumu.

18.uzdevums.
Nošķelta konusa aksiālšķēluma diagonāles garums ir 15 cm, bet pamatu rādiusu garumi ir attiecīgi 4 cm un 8 cm. Aprēķināt nošķelta konusa tilpumu.

Definīcija. Par ***lodi*** **sauc rotācijas ķermeni, kas izveidojas, pusriņķim rotējot ap taisni, uz kuras atrodas tā diametrs**.

- Pusriņķa līnija $\smile$ $\boldsymbol{AB}$ ir lodes veidule;
- veidule $\smile$ $\boldsymbol{AB}$, rotējot ap diametru $\boldsymbol{AB}$, izveido ***lodes virsmu***, ko sauc par ***sfēru***;
- pusriņķa diametra viduspunkts $\boldsymbol{O}$ ir lodes (vai sfēras) ***centrs***;
- nogrieznis, kas savieno centru $\boldsymbol{O}$ ar jebkuru lodes (vai sfēras) punktu ir lodes (sfēras) rādiuss, tas sakrīt ar pusriņķa rādiusu $\boldsymbol{OA} = \boldsymbol{OB} = \boldsymbol{R}$.



7. zīm.

Plakni, kas iet caur lodes centru, sauc par ***diametrālo plakni***. Lodes šķēlumu ar diametrālo plakni sauc par ***lielo riņķi***, bet sfēras šķēlumu ar diametrālo plakni sauc par ***lielo riņķa līniju***.

Ja attālums $\boldsymbol{d}$ no lodes (sfēras) centra $\boldsymbol{O}$ līdz šķēluma plaknei ir mazāks par lodes (sfēras) rādiusu $\boldsymbol{R}$, tad lodes (sfēras) šķēlums ar šo plakni ir riņķis (riņķa līnija). Šķēluma riņķa (riņķa līnijas) rādiusu $\boldsymbol{r}$ aprēķina pēc formulas $\boldsymbol{r} = \sqrt{\boldsymbol{R}^2 - \boldsymbol{d}^2}$.

Lodes virsmas laukums (jeb sfēras laukums) ir vienāds ar četrkāršotu lodes lielā riņķa laukumu :

$$\boxed{\boldsymbol{S} = 4\,\pi\,\boldsymbol{R}^2}.$$

Lodes tilpums ir vienāds ar lodes virsmas laukuma un lodes rādiusa trešdaļas reizinājumu :

$$\boxed{\boldsymbol{V} = \frac{1}{3}\left(4\pi\,\boldsymbol{R}^2 \cdot \boldsymbol{R}\right)} \quad \text{jeb} \quad \boxed{\boldsymbol{V} = \frac{4}{3}\,\pi\,\boldsymbol{R}^3}.$$

19.uzdevums.
Pusriņķis, kura diametrs ir 6 cm, rotē ap šo diametru. Aprēķināt lielā riņķa laukumu un lodes virsmas laukumu.

20.uzdevums.
Lodes diametrs ir 34 m. Lodi šķeļ plakne. Šķēluma rādiuss ir 15 m. Aprēķināt attālumu no lodes centra līdz šķēluma plaknei.

21.uzdevums.
Dotas divas lodes. To sfēru laukumu attiecība ir 1 : 9. Atrast šo ložu tilpumu attiecību.

22.uzdevums.
Lodes tilpums ir $36\,\pi$ cm^3. Aprēķināt lodes diametru un sfēras laukumu.