Valentīna Beinaroviča

Lineāra un kvadrātfunkcija, pakāpes funkcija (Teorētiskais konspekts)

Materiāls izstrādāts
ESF Darbības programmas 2007. - 2013.gadam "Cilvēkresursi un nodarbinātība"
prioritātes 1.2. "Izglītība un prasmes"
pasākuma 1.2.1. "Profesionālās izglītības un vispārējo prasmju attīstība"
aktivitātes 1.2.1.2. "Vispārējo zināšanu un prasmju uzlabošana"
apakšaktivitātes 1.2.1.1.2. "Profesionālajā izglītībā iesaistīto pedagogu kompetences paaugstināšana"
Latvijas Universitātes realizētā projekta
"Profesionālajā izglītībā iesaistīto vispārizglītojošo mācību priekšmetu pedagogu kompetences paaugstināšana"
(Vienošanās Nr.2009/0274/1DP/1.2.1.1.2/09/IPIA/VIAA/003,
LU reģistrācijas Nr.ESS2009/88) īstenošanai.

Rīga, 2011.

FUNKCIJAS DEFINĪCIJA

Definīcija. Mainīgo lielumu $\boldsymbol{y}$ sauc par mainīgā lieluma $\boldsymbol{x}$ ***funkciju*** un raksta $\boldsymbol{y = f(x)}$, ja pēc noteikta likuma $\boldsymbol{f}$ katrai $\boldsymbol{x}$ vērtībai, kas ņemta no kādas skaitļu kopas $\boldsymbol{X}$, atbilst tieši viena noteikta citas kopas $\boldsymbol{Y}$ vērtība $\boldsymbol{y}$.

$\boldsymbol{y}$ — atkarīgais mainīgais, funkcijas vērtība;
$\boldsymbol{x}$ — neatkarīgais mainīgais, arguments;
$\boldsymbol{X}$ — funkcijas definīcijas apgabals, apzīmē $\boldsymbol{D(f)}$;
$\boldsymbol{Y}$ — funkcijas vērtību kopa, apzīmē $\boldsymbol{E(f)}$.

FUNKCIJAS GRAFIKA DEFINĪCIJA

Definīcija. Par funkcijas $\boldsymbol{y = f(x)}$ ***grafiku*** sauc visu to punktu kopu koordinātu plaknē, kuru koordinātas ir $\boldsymbol{\big(x;\ f(x)\big)}$, ja $x \in D(f)$.

Funkciju var uzdod
a) ar grafiku,
b) ar tabulu,
c) ar formulu (t.i., ar analitisko izteiksmi),
d) ar vārdiem (aprakstoši).

FUNKCIJAS VISPĀRĪGAS ĪPAŠĪBAS

Funkcijas f īpašību pētīšanā ir paredzēti vairāki posmi, galvenie no tiem ir:
1. $D(f)$ noteikšana.
2. $E(f)$ noteikšana.
3. Funkcijas nuļļu noteikšana.
4. Intervālu noteikšana, kur funkcija ir pozitīva vai negatīva.
5. Funkcijas monotonitātes noskaidrošana.
6. Funkcijas paritātes noskaidrošana.
7. Funkcijas periodiskuma noskaidrošana.

Definīcija. Par funkcijas $\boldsymbol{y = f(x)}$ ***nulli*** sauc tādu argumenta x vērtību $\boldsymbol{x_0}$, ar kuru funkcijas vērtība ir vienāda ar 0 jeb $\boldsymbol{f(x_0) = 0}$.

Definīcija. Funkciju $\boldsymbol{f(x)}$ sauc par ***augošu*** intervālā $(a; b)$, ja katrām divām argumenta vērtībām x_1 un x_2 no šī intervāla, kurām $x_1 < x_2$, ir spēkā nevienādība $f(x_1) < f(x_2)$ (jeb $f(x_1) - f(x_2) < 0$).

Ja funkcija ir augoša, tad mazākai argumenta vērtībai atbilst funkcijas mazākā vērtība.

Definīcija. Funkciju $\boldsymbol{f(x)}$ sauc par ***dilstošu*** intervālā $(a; b)$, ja katrām divām argumenta vērtībām x_1 un x_2 no šī intervāla, kurām $x_1 < x_2$, ir spēkā nevienādība $f(x_1) > f(x_2)$ (jeb $f(x_1) - f(x_2) > 0$).

Ja funkcija ir dilstoša, tad mazākai argumenta vērtībai atbilst funkcijas lielākā vērtība.

Ja funkcija intervalā $(a; b)$ ir vai nu tikai augoša, vai nu tikai dilstoša, tad saka, ka šī funkcija dotajā intervālā ir ***monotona***.

Definīcija. Funkciju $\boldsymbol{f(x)}$ sauc par ***pāra funkciju***, ja

1. tās definīcijas apgabals $D(f)$ ir simetrisks attiecībā pret nulli,
   t.i., ja $x \in D(f)$, tad arī $-x \in D(f)$;
2. katram $x \in D(f)$ ir spēkā vienādība $f(-x) = f(x)$.

Pāra funkcijas grafiks ir simetrisks attiecība pret Oy asi.

Definīcija. Funkciju $\boldsymbol{f(x)}$ sauc par ***nepāra funkciju***, ja

1. tās definīcijas apgabals $D(f)$ ir simetrisks attiecībā pret nulli,
   t.i., ja $x \in D(f)$, tad arī $-x \in D(f)$;
2. katram $x \in D(f)$ ir spēkā vienādība $f(-x) = -f(x)$.

Pāra funkcijas grafiks ir simetrisks attiecība pret koordinātu plaknes sākumpunktu.

Ja neizpildās šo definīciju 1. vai 2. nosacījums, tad saka, ka funkcija ir ***nedz pāra, nedz nepāra***.

Definīcija. Funkciju $\boldsymbol{f(x)}$ sauc par ***periodisku***, ja eksistē tāds skaitlis $T > 0$, ka

1. katram $x \in D(f)$ arī $x \pm T \in D(f)$;
2. katram $x \in D(f)$ ir spēkā vienādība $f(x + T) = f(x)$.

Mazāko no šiem skaitļiem T sauc par funkcijas f ***galveno periodu***.

Ja periodiskas funkcijas grafiks ir konstruēts kādā intervālā, kura garums vienāds ar periodu T, tad, šo līniju pārbīdot paralēli Ox asij par lielumu nT $(n \in \mathbb{Z})$, iegūst funkcijas grafiku pārējos definīcijas apgabala punktos.

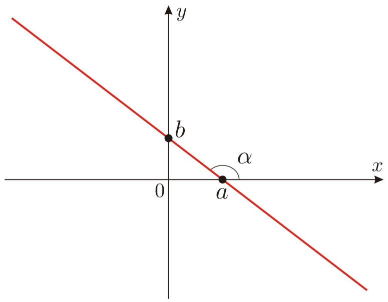
LINEĀRA FUNKCIJA

Definīcija. Funkciju, kuras vispārīgais veids ir $\boldsymbol{y = kx + b}$, kur $k, b \in \mathbb{R}$, sauc par ***lineāru funkciju***. Lineāras funkcijas grafiks ir ***taisne***.

$\boldsymbol{k}$ – taisnes ***virziena koeficients***,

$\boxed{k = \operatorname{tg}\alpha}$, kur α leņķis, ko veido taisne ar Ox ass pozitīvo virzienu.

$\boldsymbol{b}$ – ***sākumordināta***, atbilst taisnes un Oy ass krustpunkta ordinātai.



1. zīm.

Lineāras funkcijas īpašības

1. $D(f) = \mathbb{R}$.
2. $E(f) = \mathbb{R}$.
3. Funkcijas nulle $x = -\dfrac{b}{k}$ (1. zīm. $x = a$).
4. Funkcija aug, ja $k > 0$.
   Funkcija dilst, ja $k < 0$.

Lineāras funkcijas īpašgadījumi

Ja $b = 0$, tad $\boldsymbol{y = k\,x}$ – ***tiešas proporcionalitātes funkcija***, tās grafiks ir taisne, kas iet caur koordinātu plaknes sākumpunktu.

Ja $k = 0$, tad $\boldsymbol{y = b}$ – ***konstantes funkcija***, tās grafiks ir taisne, kas ir paralēla Ox asij.

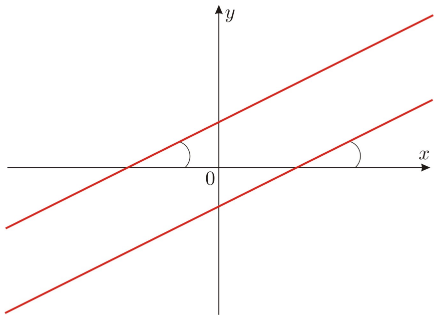
Ja $k = 1,\ b = 0$, tad $\boldsymbol{y = x}$ – šīs funkcijas grafiks ir I un III kvadranta bisektrise.

Ja $k = -1,\ b = 0$, tad $\boldsymbol{y = -x}$ – šīs funkcijas grafiks ir II un IV kvadranta bisektrise.

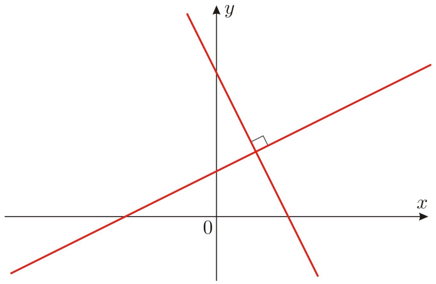
$$y = |x| = \begin{cases} x, & \text{ja} \quad x \geq 0, \\ -x, & \text{ja} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

Funkcijas $\boldsymbol{y = |x|}$ grafiks ir lauzta līnija, kas sastāv no I un II kvadranta bisektrisēm.

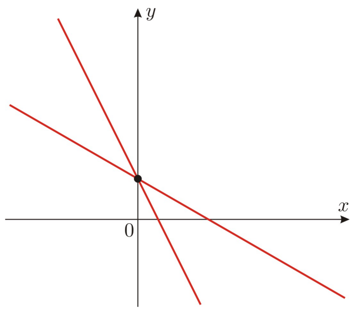
$$y = k_1x + b_1 \qquad\qquad y = k_2x + b_2$$



2. zīm. $\boxed{k_1 = k_2}$



3. zīm. $\boxed{k_1 \cdot k_2 = -1}$

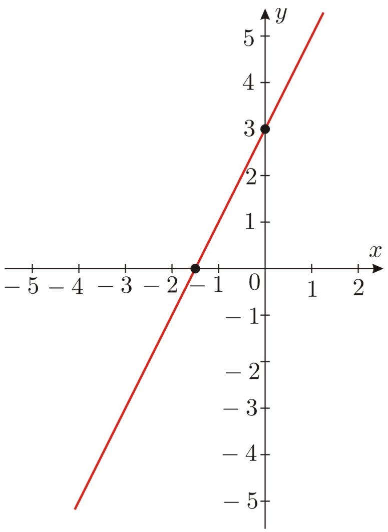


4. zīm. $\boxed{b_1 = b_2}$

1. uzdevums.

5. zīmējumā attēlots funkcijas $\boldsymbol{y = k\,x + b}$ grafiks.

- Noteikt koeficientus k un b.
- Noteikt funkcijas nulli.
- Noteikt funkcijas monotonitāti.
- Uzrakstīt divas funkcijas, kuru grafiki ir paralēli uzzīmētajai taisnei.
- Uzrakstīt funkciju, kuras grafiks ir perpendikulārs uzzīmētajai taisnei.
- Uzrakstīt lineāru funkciju, kuras grafiks iet caur punktu (0; 3).
- Uzrakstīt lineāru funkciju, kuras grafiks ir paralēls (vai perpendikulārs) uzzīmētajai taisnei un iet caur koordinātu plaknes sākumpunktu.



5. zīm.

Atrisinājums.

KVADRĀTFUNKCIJA

Definīcija. Funkciju, kuras vispārīgais veids ir $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$, kur a, b, $c \in \mathbb{R}$ un $a \neq 0$, sauc par ***kvadrātisko funkciju*** jeb ***kvadrātfunkciju***. Kvadrātfunkcijas grafiks ir ***parabola***.

$\boldsymbol{a}$ — nosaka parabolas zaru vērsumu.
$\boldsymbol{c}$ — norāda, kurā punktā parabola krusto Oy asi, t.i., $(0; c)$.

Ja $\boldsymbol{b^2 - 4ac > 0,}$ tad parabolai ir divi krustpunkti ar Ox asi $(x_1; 0)$ un $(x_2; 0)$, x_1 un x_2 ir funkcijas nulles (tās ir kvadrātvienādojuma $ax^2 + bx + c = 0$ saknes).

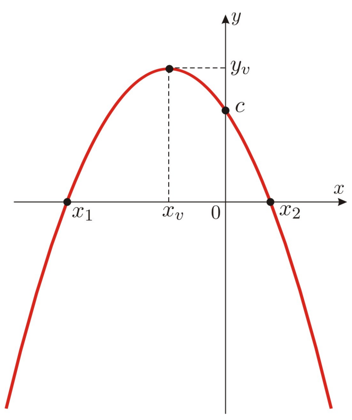
Ja $\boldsymbol{b^2 - 4ac = 0,}$ tad parabola pieskarās Ox asij, šai gadījumā parabolas virsotnes abscisa ir kvadrātfunkcijas nulle (tā ir vienādojuma $ax^2 + bx + c = 0$ divkārša sakne).

Ja $\boldsymbol{b^2 - 4ac < 0,}$ tad parabola nekrusto Ox asi, funkcijai nuļļu nav.

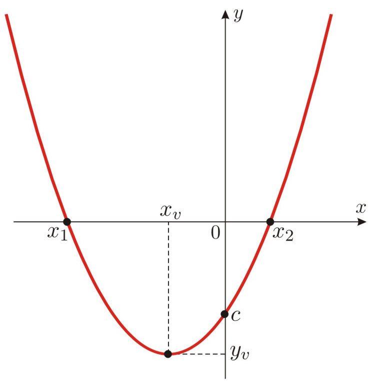
Parabola ir simetriska attiecībā pret taisni $x = x_v$, kur x_v ir parabolas virsotnes abscisa

$$\boxed{x_v = -\frac{b}{2a}}, \quad \text{kā arī} \quad \boxed{x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}}.$$

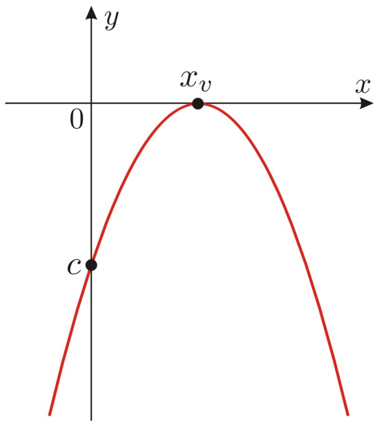
2. uzdevums. Zīmējumā (6. zīm., 7. zīm., 8. zīm.) attēlots kvadrātfunkcijas $y = ax^2 + bx + c$ grafiks. Noteikt koeficientu a, b, c zīmes.



6. zīm.



7. zīm.



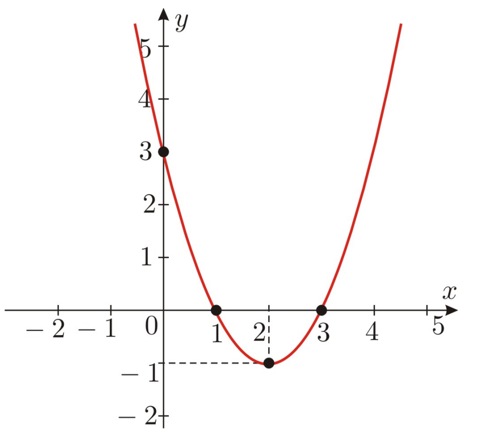
8. zīm.

Kvadrātfunkcijas $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$ īpašības

$a > 0$	$a < 0$
1. $D(y) = \mathbb{R}$.	1. $D(y) = \mathbb{R}$.
2. $E(y) = [y_v; +\infty)$.	2. $E(y) = (-\infty; y_v]$.
3. Funkcijas nulles $x_1,\ x_2$ sakrīt ar vienādojuma $ax^2 + bx + c = 0$ saknēm. $(x_1 \leq x_2)$	3. Funkcijas nulles $x_1,\ x_2$ sakrīt ar vienādojuma $ax^2 + bx + c = 0$ saknēm. $(x_1 \leq x_2)$
4. Funkcija pozitīva, ja $x \in (-\infty; x_1) \bigcup (x_2; +\infty)$.	4. Funkcija pozitīva, ja $x \in (x_1;\ x_2)$.
5. Funkcija negatīva, ja $x \in (x_1;\ x_2)$.	5. Funkcija negatīva, ja $x \in (-\infty; x_1) \bigcup (x_2; +\infty)$.
6. Funkcija dilst, ja $x \in (-\infty; x_v)$.	6. Funkcija dilst, ja $x \in (x_v; +\infty)$.
7. Funkcija aug, ja $x \in (x_v; +\infty)$.	7. Funkcija dilst, ja $x \in (-\infty; x_v)$.
8. Funkcijas vismazākā vērtība $y_{min} = y_v$, ja $x = x_v = -\dfrac{b}{2a}$.	8. Funkcijas vislielākā vērtība $y_{max} = y_v$, ja $x = x_v = -\dfrac{b}{2a}$.

3. uzdevums.
9. zīmējumā attēlots funkcijas $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$ grafiks.

- Noteikt koeficientu a, b, c vērtības.
- Noteikt funkcijas nulles.
- Noteikt funkcijas monotonitātes intervālus.
- Noteikt intervālus, kur funkcija ir pozitīva vai negatīva.
- Noteikt funkcijas vērtību kopu $E(y)$.
- Uzrakstīt divas kvadrātfunkcijas, kurām ir tās pašas nulles.



9. zīm.

Atrisinājums.

PAKĀPES FUNKCIJA

Definīcija.
Funkciju, kuras vispārīgais veids ir $\boldsymbol{y = x^n}$, kur $n \in \mathbb{R}$, sauc par ***pakāpes funkciju***.

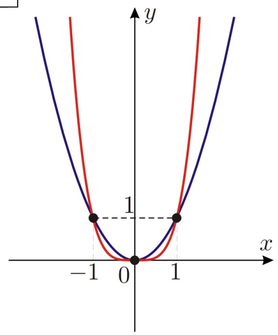
Atsevišķi pakāpes funkcijas gadījumi:

- $y = x$, ja $n = 1$;
- $y = x^2$, ja $n = 2$;
- $y = \dfrac{1}{x}$, ja $n = -1$;
- $y = x^3$, ja $n = 3$.

---

n – vesels pozitīvs pāra skaitlis; $y = x^2, y = x^4, y = x^6, \ldots$

1. $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
2. $E(y) = [0; +\infty)$.
3. Funkcijas nulle $x = 0$.
4. Pāra funkcija, $(-x)^4 = x^4$.
5. Funkcija dilst, ja $x \in (-\infty; 0)$.
6. Funkcija aug, ja $x \in (0; +\infty)$.
7. Funkcijas vismazāka vērtība $y_{min} = 0$, ja $x = 0$.

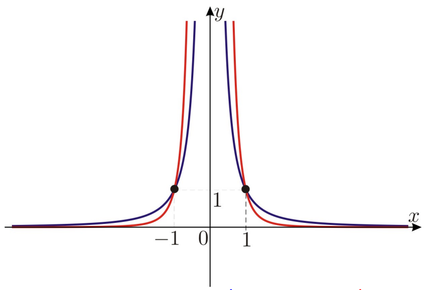


10. zīm. $\boldsymbol{y = x^2}$, $\boldsymbol{y = x^4}$.

---

n – vesels negatīvs pāra skaitlis; $y = \dfrac{1}{x^2}, y = \dfrac{1}{x^4}, y = \dfrac{1}{x^6}, \ldots$

1. $D(y) = (-\infty; 0) \bigcup (0; +\infty)$.
2. $E(y) = (0; +\infty)$.
3. Funkcijai nav nuļļu.
4. Pāra funkcija.
5. Funkcija aug, ja $x \in (-\infty; 0)$.
6. Funkcija dilst, ja $x \in (0; +\infty)$.
7. Funkcija nesasniedz vislielāko un vismazāko vērtību.



11. zīm. $\boldsymbol{y = \dfrac{1}{x^2}}$, $\boldsymbol{y = \dfrac{1}{x^4}}$.

n – vesels pozitīvs nepāra skaitlis; $y = x$, $y = x^3$, $y = x^5, \ldots$

1. $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

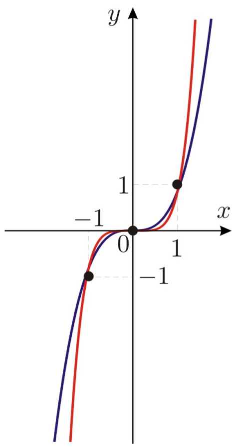
2. $E(y) = (-\infty;\, +\infty)$.

3. Funkcijas nulle $x = 0$.

4. Nepāra funkcija, $(-x)^3 = x^3$.

5. Funkcija aug visā definīcijas apgabalā.

6. Funkcija nesasniedz vislielāko un vismazāko vērtību.



12. zīm. $y = x^3$, $y = x^5$.

n – vesels negatīvs nepāra skaitlis; $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x^3}$, $y = \frac{1}{x^5}, \ldots$

1. $D(y) = (0; +\infty)$.

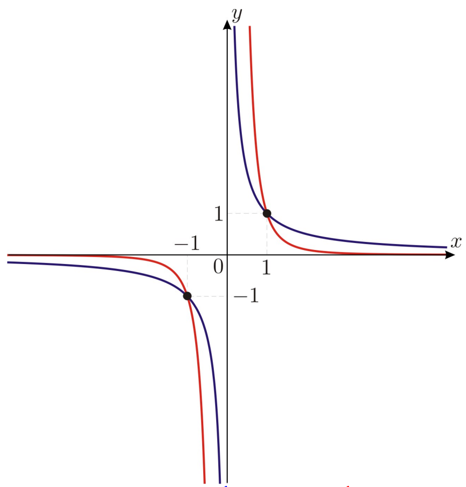
2. $E(y) = (-\infty; 0) \bigcup (0;\, +\infty)$.

3. Funkcijai nav nuļļu.

4. Nepāra funkcija.

5. Funkcija dilst visā definīcijas apgabalā.

6. Funkcija nesasniedz vislielāko un vismazāko vērtību.



13. zīm. $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x^3}$.

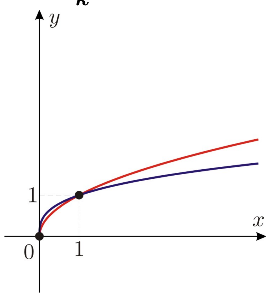
Definīcija. Par pozitīva skaitļa a ***racionālu pakāpi*** $\boldsymbol{a^{\frac{m}{k}}}$ $(m \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}, k \geq 2)$ sauc tādu skaitli b, kuram $b^k = a^m$.

Funkcijas $y = x^{\frac{m}{k}}$ ***īpašības.***

m − pozitīvs vesels skaitlis, $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ $\quad y = x^{\frac{1}{2}},\ y = x^{\frac{3}{2}},\ y = x^{\frac{3}{4}} \ldots$

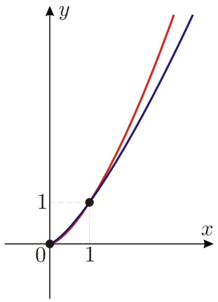
1. $D(y) = [0; +\infty)$.
2. $E(y) = [0; +\infty)$.
3. Funkcijas nulle $x = 0$.
4. Nedz pāra, nedz nepāra funkcija.
5. Funkcija aug visā definīcijas apgabalā.

$\boldsymbol{\frac{m}{k} < 1}$



14. zīm. $\boldsymbol{y = x^{\frac{1}{3}}}$, $\boldsymbol{y = x^{\frac{1}{2}}}$.

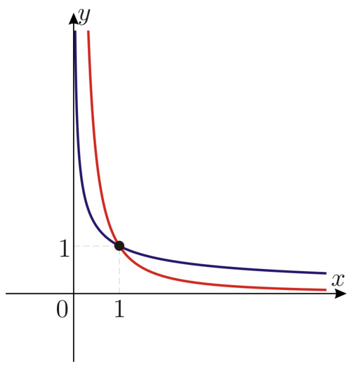
$\boldsymbol{\frac{m}{k} > 1}$



15. zīm. $\boldsymbol{y = x^{\frac{4}{3}}}$, $\boldsymbol{y = x^{\frac{3}{2}}}$.

m − negatīvs vesels skaitlis, $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ $\quad y = x^{-\frac{1}{2}},\ y = x^{-\frac{3}{2}},\ y = x^{-\frac{3}{4}} \ldots$

1. $D(y) = (0; +\infty)$.
2. $E(y) = (0; +\infty)$.
3. Funkcijai nav nuļļu.
4. Nedz pāra, nedz nepāra funkcija.
5. Funkcija dilst visā definīcijas apgabalā.



16. zīm. $\boldsymbol{y = x^{-\frac{1}{2}}}$, $\boldsymbol{y = x^{-\frac{3}{2}}}$.