



EIROPAS SAVIENĪBA

IEGULDĪJUMS TAVĀ NĀKOTNĒ



LATVIJAS
UNIVERSITĀTE

ANNO 1919



PROFESIONĀLAJĀ IZGLĪTĪBĀ IESAISTĪTO
VISPĀRIZGLĪTOJOŠO MĀCĪBU PRIEKŠMETU PEDAGOGU
KOMPETENCES PAAUGSTINĀŠANA

Armands Gricāns

Trigonometriskās funkcijas (Teorētiskais konspekts)

Materiāls izstrādāts

ESF Darbības programmas 2007. - 2013.gadam “Cilvēkresursi un nodarbinātība”
prioritātes 1.2. “Izglītība un prasmes”

pasākuma 1.2.1. “Profesionālās izglītības un vispārējo prasmju attīstība”

aktivitātes 1.2.1.2. “Vispārējo zināšanu un prasmju uzlabošana”

apakšaktivitātes 1.2.1.1.2. “Profesionālajā izglītībā iesaistīto pedagogu
kompetences paaugstināšana”

Latvijas Universitātes realizētā projekta

“Profesionālajā izglītībā iesaistīto vispārīzglītojošo mācību priekšmetu pedagogu
kompetences paaugstināšana”

(Vienošanās Nr.2009/0274/1DP/1.2.1.1.2/09/IPIA/VIAA/003,

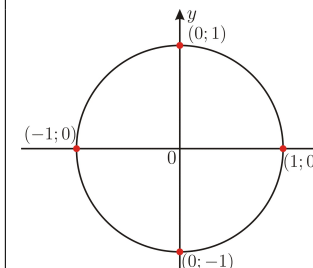
LU reģistrācijas Nr.ESS2009/88) īstenošanai.

Rīga, 2011.

VIENĪBAS RIŅĶA LĪNIJA

Definīcija.

Par **vienības riņķa līniju** jeb **trigonometrisko riņķa līniju** (TRL) sauc riņķa līniju, kuras centrs atrodas koordinātu sistēmas sākumpunktā un rādiuss ir vienu vienību garš.



1. zīm.

RADIĀNI UN GRĀDI

Leņķus mēra grādos un radiānos. 1° ir $\frac{1}{360}$ no pilna riņķa (pilna leņķa).

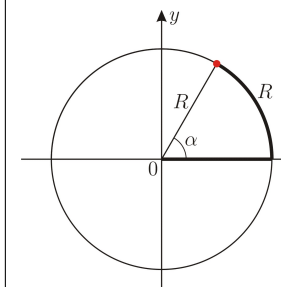
Definīcija.

Par vienu **radiānu** sauc tādu TRL centra leņķi, kura savelkošā loka garums ir vienāds ar rādiusu (jeb 1 garuma vienību).

TRL: $C = 2\pi R$, $R = 1 \Rightarrow C_{TRL} = 2\pi$

Visa riņķa līnija (pilns leņķis) satur 2π radiānus un tās atbilstošais centra leņķis ir 360° liels.

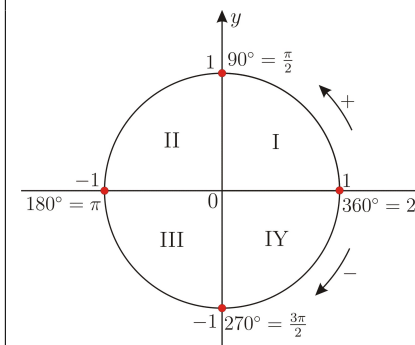
$$360^\circ = 2\pi \text{ rad}$$



2. zīm.

LEŅĶU ATLIKŠANA UZ TRL

- 1) Lenka virsotne atrodas punktā O .
- 2) Viena leņķa mala sakrīt ar Ox ass pozitīvo virzienu.
- 3) Otra mala griežas ap virsotni O pret pulksteņa rādītāja virzienu - pozitīvais (+) virziens, pulksteņa rādītāja virzienā - negatīvais (-) virziens.



3. zīm.

Grādi → Radiāni	Radiāni → Grādi
$360^0 = 2\pi$	$2\pi = 360^0$
$1^0 = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180} \approx 0,017\text{rad}$	$1\text{rad} = \frac{360^0}{2\pi} = \frac{180^0}{\pi} \approx 57^0 14' 44''$
$n^0 = \frac{\pi n}{180} \text{ rad}$	$n \text{ rad} = \left(\frac{180 n}{\pi}\right)^0$
$120^0 = \frac{\pi 120}{180} = \frac{2\pi}{3}$	$8 \text{ rad} = \left(\frac{180 \cdot 8}{\pi}\right)^0 = \left(\frac{1440}{\pi}\right)^0 \approx 458^0$

1. uzdevums. Noteikt leņķa radiālo lielumu

$15^0 =$
 $30^0 =$
 $45^0 =$
 $60^0 =$
 $90^0 =$
 $120^0 =$
 $135^0 =$
 $150^0 =$
 $210^0 =$
 $270^0 =$

2. uzdevums. Izteikt grādos

$\frac{5\pi}{12} =$
 $\frac{4\pi}{3} =$
 $\frac{11\pi}{6} =$
 $\frac{9\pi}{4} =$
 $\frac{13\pi}{12} =$
 $\frac{7\pi}{3} =$

SINUSA, KOSINUSA, TANGENSA, KOTANGENSA DEFINĪCIJAS

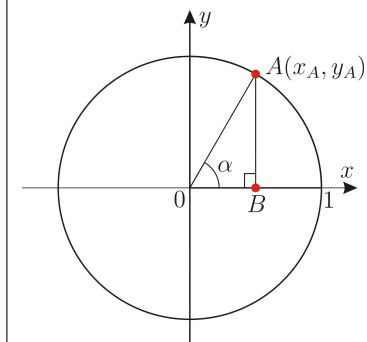
Definīcija. Par skaitļa α *sinusu* sauc šim skaitlim atbilstošā vienības riņķa līnijas punkta ordinātu.
Pieraksta $\sin \alpha$.

ordinātu ass \leftrightarrow sinusu ass

Definīcija. Par skaitļa α *kosinusu* sauc šim skaitlim atbilstošā vienības riņķa līnijas punkta abscisu.
Pieraksta $\cos \alpha$.

abscisu ass \leftrightarrow sinusu ass

No 4. zīmējuma $AB^2 + OB^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$



4. zīm.

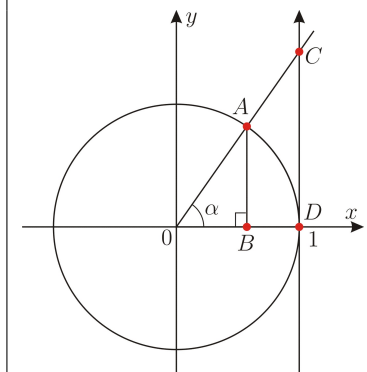
No 5. zīm. $\triangle OAB$: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{AB}{OB} = \frac{y_A}{x_A} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

Definīcija. Par skaitļa α *tangensu* sauc šī skaitļa sinusa attiecību pret tā kosinusu.
Pieraksta $\operatorname{tg} \alpha$.

No 5. zīm. $\triangle OCD$: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{CD}{OD} = CD$

TRL pieskare punktā (1;0) \leftrightarrow tangensu ass

Definīcija. Par skaitļa α *tangensu* sauc šim skaitlim atbilstošā tangensu ass punkta ordinātu.



5. zīm.

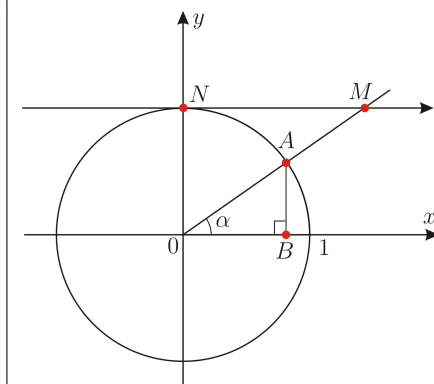
No 6. zīm. $\triangle OAB$: $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{OB}{AB} = \frac{x_A}{y_A} \Rightarrow \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$

Definīcija. Par skaitļa α *kotangensu* sauc šī skaitļa kosinusa attiecību pret tā sinusu.
Pieraksta $\operatorname{ctg} \alpha$.

No 6. zīm. $\triangle MON$: $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{MN}{ON} = MN$

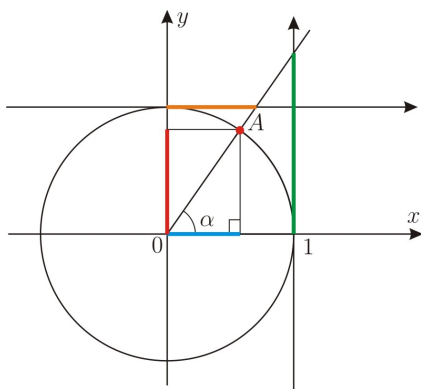
TRL pieskare punktā (0;1) \leftrightarrow kotangensu ass

Definīcija. Par skaitļa α *kotangensu* sauc šim skaitlim atbilstošā kotangensu ass punkta abscisu.



6. zīm.

TRIGONOMETRISKĀS ASIS



7. zīm. $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$

3. uzdevums. Izmantojot TRL, attēlot 8. zīmējumā atzīmētā skaitļa α sinus, kosinusu, tangensu un kotangensu.

4. uzdevums. Izmantojot TRL, attēlot 9. zīmējumā un aprēķināt skaitļa $\alpha = -\frac{5\pi}{6}$ sinus, kosinusu, tangensu un kotangensu.

Atrisinājums. Atzīmē punktu A , konstruē $\triangle AOB$ -

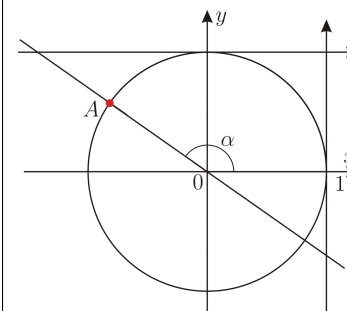
$$AB = \dots \Rightarrow \sin \alpha = \dots,$$

$$OB = \dots \Rightarrow \cos \alpha = \dots,$$

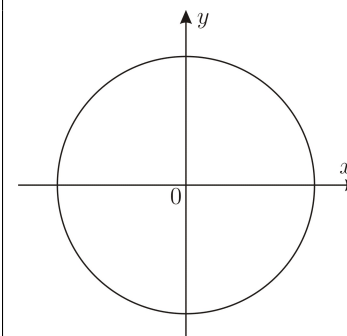
$$\operatorname{tg} \alpha = \dots, \operatorname{ctg} \alpha = \dots$$

5. uzdevums. Izmantojot TRL, savilkt augošā secībā :

- a) $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right), \sin\frac{7\pi}{12}, \sin\frac{\pi}{5};$
- b) $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right), \cos\frac{7\pi}{12}, \cos\frac{\pi}{5}.$



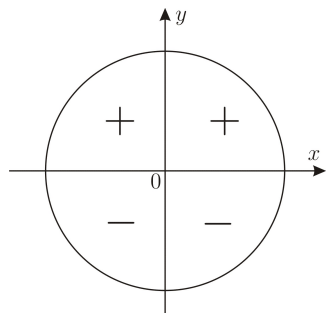
8. zīm.



9. zīm.

TRIGONOMETRISKO FUNKCIJU ZĪMES

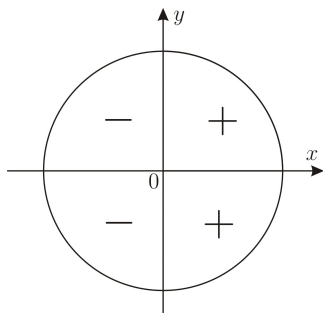
$\sin \alpha$



10. zīm.

$\sin \leftrightarrow$ ordināta

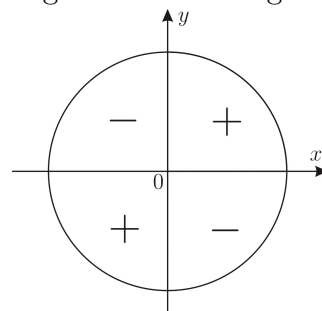
$\cos \alpha$



11. zīm.

$\cos \leftrightarrow$ abscisa

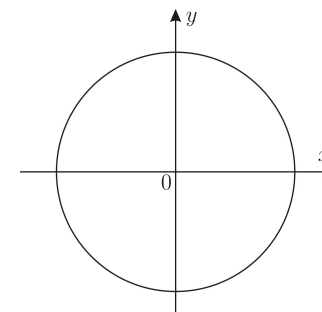
$\operatorname{tg} \alpha$



12. zīm.

$\operatorname{tg} \leftrightarrow \frac{\text{ordināta}}{\text{abscisa}}$

$\operatorname{ctg} \alpha$



13. zīm.

6. uzdevums. Dotajiem skaitļiem atzīmēt atbilstošos punktus uz TRL (13. zīm.) un noteikt

sinusa, kosinusa, tangensa zīmi: $\frac{5\pi}{8}$, $-\frac{2\pi}{5}$, $\frac{27\pi}{8}$.

Atrisinājums.

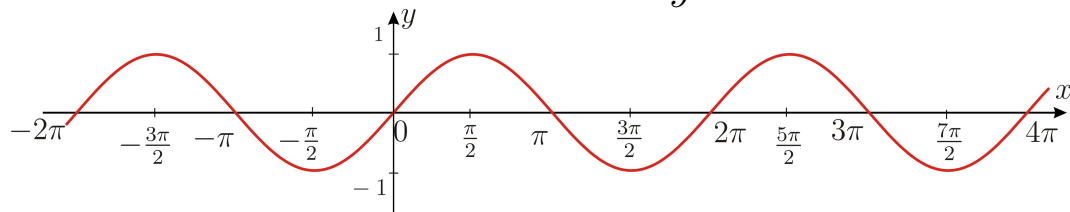
$$\begin{array}{lll} \sin \frac{5\pi}{8} & \sin \left(-\frac{2\pi}{5}\right) & \sin \frac{27\pi}{8} \\ \cos \frac{5\pi}{8} & \cos \left(-\frac{2\pi}{5}\right) & \cos \frac{27\pi}{8} \\ \operatorname{tg} \frac{5\pi}{8} & \operatorname{tg} \left(-\frac{2\pi}{5}\right) & \operatorname{tg} \frac{27\pi}{8} \end{array}$$

TRIGONOMETRISKO FUNKCIJU VĒRTĪBAS

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	--	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	--	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	--

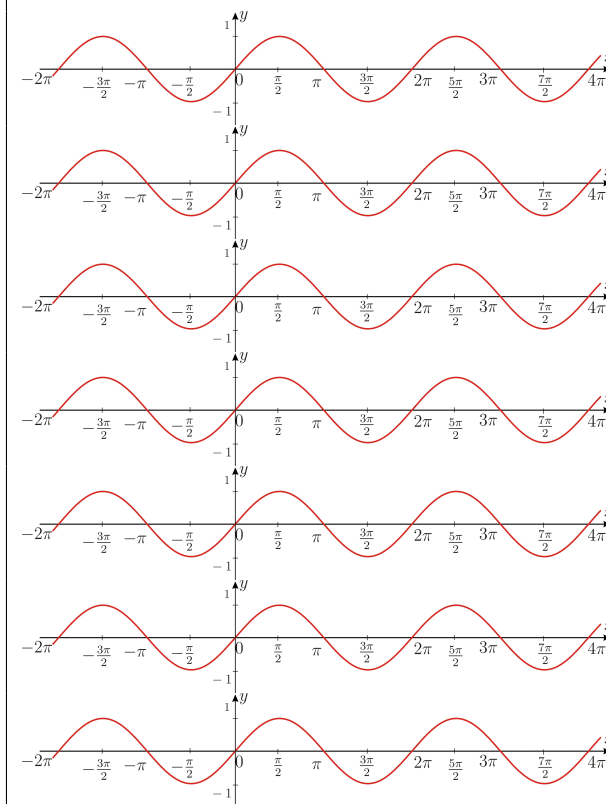
$$\begin{array}{ll} \sin \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = & \sin \frac{13\pi}{6} = \\ \cos \left(-\frac{3\pi}{4}\right) = & \cos \frac{11\pi}{6} = \\ \operatorname{tg} \left(-\frac{5\pi}{6}\right) = & \operatorname{tg} \frac{5\pi}{3} = \\ \operatorname{ctg} \left(-\frac{\pi}{6}\right) = & \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{4} = \end{array}$$

TRIGONOMETRISKĀS FUNKCIJAS $y = \sin x$ GRAFIKS UN ĪPAŠĪBAS

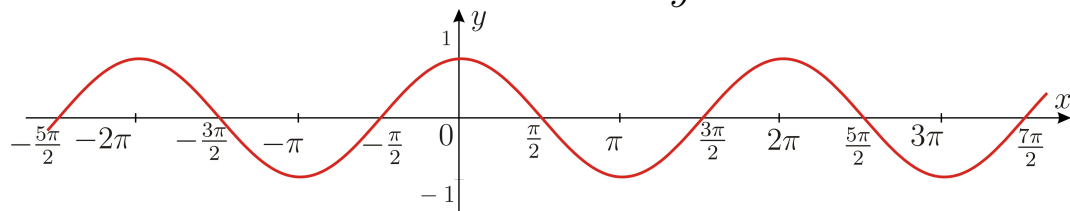


14. zīm.

1. $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
2. $E(y) = [-1; 1]$.
3. Nepāra funkcija: katram reālam x ir spēkā vienādība $\sin(-x) = -\sin x$.
4. Periodiska funkcija: $T = 2\pi$, katram reālam x ir spēkā vienādība $\sin(x \pm 2\pi) = \sin x$.
5. Funkcijas nulles: $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
6. Funkcija pozitīva, ja $x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.
7. Funkcija negatīva, ja $x \in (-\pi + 2\pi n; 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.
8. Funkcija ir augoša, ja $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.
9. Funkcija ir dilstoša, ja $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.
10. Funkcijas vislielākā vērtība $y_{max} = 1$, ja $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
 Funkcijas vismazākā vērtība $y_{min} = -1$, ja $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

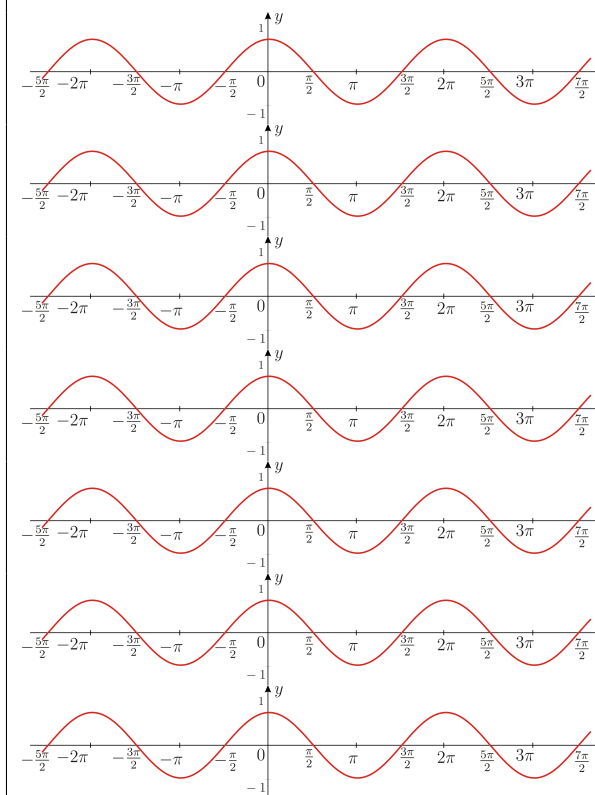


TRIGONOMETRISKĀS FUNKCIJAS $y = \cos x$ GRAFIKS UN ĪPAŠĪBAS



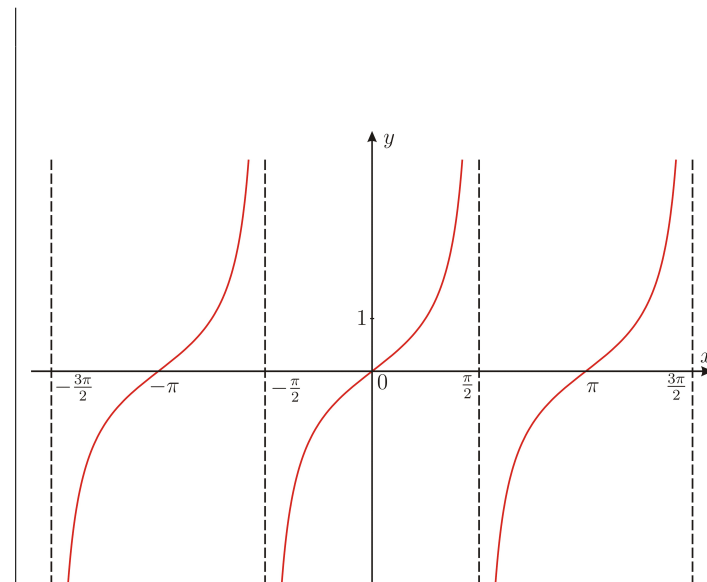
15. zīm.

1. $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
2. $E(y) = [-1; 1]$.
3. Pāra funkcija: katram reālam x ir spēkā vienādība $\cos(-x) = \cos x$.
4. Periodiska funkcija: $T = 2\pi$, katram reālam x ir spēkā vienādība $\cos(x \pm 2\pi) = \cos x$.
5. Funkcijas nulles: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
6. Funkcija pozitīva, ja $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.
7. Funkcija negatīva, ja $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.
8. Funkcija ir augoša, ja $x \in (-\pi + 2\pi n; 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.
9. Funkcija ir dilstoša, ja $x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$.
10. Funkcijas vislielākā vērtība $y_{max} = 1$, ja $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
Funkcijas vismazākā vērtība $y_{min} = -1$, ja $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.



TRIGONOMETRISKĀS FUNKCIJAS $y = \operatorname{tg} x$ GRAFIKS UN ĪPAŠĪBAS

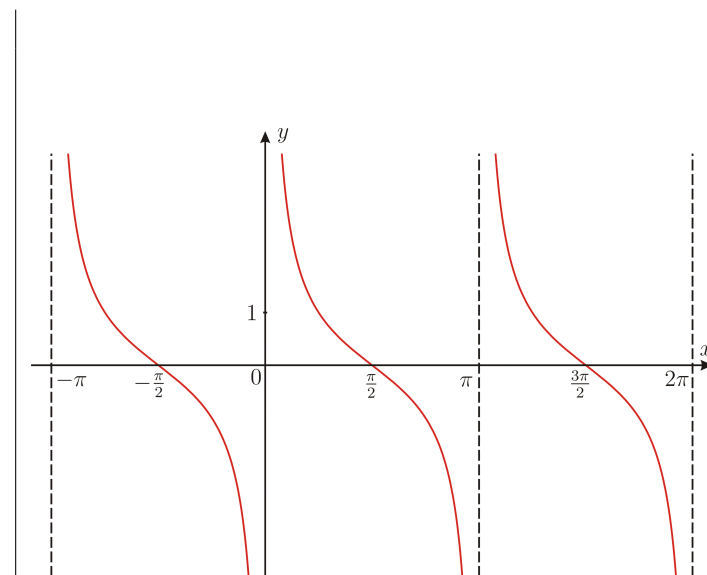
1. $D(y) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \right\}$.
2. $E(y) = (-\infty; +\infty)$.
3. Nepāra funkcija: katram $x \in D(y)$ ir spēkā vienādība $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$.
4. Periodiska funkcija: $T = \pi$, katram $x \in D(y)$ ir spēkā vienādība $\operatorname{tg}(x \pm \pi) = \operatorname{tg} x$.
5. Funkcijas nulles: $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
6. Funkcija pozitīva, ja $x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right), n \in \mathbb{Z}$.
7. Funkcija negatīva, ja $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n \right), n \in \mathbb{Z}$.
8. Funkcija ir augoša visā savā definīcijas apgabalā.
9. Funkcijas nesasniedz savu vislielāko vai vismazāko vērtību.



16. zīm.

TRIGONOMETRISKĀS FUNKCIJAS $y = \operatorname{ctg} x$ GRAFIKS UN ĪPAŠĪBAS

1. $D(y) = \mathbb{R} \setminus \{\pi n, n \in \mathbb{Z}\}$.
2. $E(y) = (-\infty; +\infty)$.
3. Nepāra funkcija: katram $x \in D(y)$ ir spēkā vienādība $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$.
4. Periodiska funkcija: $T = \pi$, katram $x \in D(y)$ ir spēkā vienādība $\operatorname{ctg}(x \pm \pi) = \operatorname{ctg} x$.
5. Funkcijas nulles: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.
6. Funkcija pozitīva, ja $x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$.
7. Funkcija negatīva, ja $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$.
8. Funkcija ir dilstoša visā savā definīcijas apgabalā.
9. Funkcijas nesasniedz savu vislielāko vai vismazāko vērtību.



17. zīm.