EIROPAS SOCIĀLAIS FONDS

EIROPAS SAVIENĪBA

IEGULDĪJUMS TAVĀ NĀKOTNĒ

LATVIJAS UNIVERSITĀTE ANNO 1919

PROFESIONĀLAJĀ IZGLĪTĪBĀ IESAISTĪTO VISPĀRIZGLĪTOJOŠO MĀCĪBU PRIEKŠMETU PEDAGOGU KOMPETENCES PAAUGSTINĀŠANA

Valentīna Beinaroviča

Algebriskas nevienādības (Teorētiskais konspekts)

Materiāls izstrādāts
ESF Darbības programmas 2007. - 2013.gadam “Cilvēkresursi un nodarbinātība”
prioritātes 1.2. “Izglītība un prasmes”
pasākuma 1.2.1. “Profesionālās izglītības un vispārējo prasmju attīstība”
aktivitātes 1.2.1.2. “Vispārējo zināšanu un prasmju uzlabošana”
apakšaktivitātes 1.2.1.1.2. “Profesionālajā izglītībā iesaistīto pedagogu kompetences paaugstināšana”
Latvijas Universitātes realizētā projekta
“Profesionālajā izglītībā iesaistīto vispārizglītojošo mācību priekšmetu pedagogu kompetences paaugstināšana”
(Vienošanās Nr.2009/0274/1DP/1.2.1.1.2/09/IPIA/VIAA/003,
LU reģistrācijas Nr.ESS2009/88) īstenošanai.

Rīga, 2011.

Teorētiskais konspekts ALGEBRISKAS NEVIENĀDĪBAS

Algebrisku nevienādību iegūst, ja divas algebriskas izteiksmes savieno ar nevienādības zīmi.

- $4x - \frac{1}{x} + 3 > x^2 - 1$;
- $3x - x^2 + 2 \leq 0$;
- $\frac{5x-1}{x+2} < \frac{2+3x}{x-1}$.

$\boldsymbol{A(x) > B(x)}$
vai
$\boldsymbol{A(x) < B(x)}$
vai
$\boldsymbol{A(x) \geq B(x)}$
vai
$\boldsymbol{A(x) \leq B(x)}$

Nevienādības ***atrisinājumu kopu*** veido visas mainīgā lieluma vērtības, kuras ievietojot nevienādībā, iegūst pareizu skaitlisku nevienādību.

Piemēram, $\boldsymbol{3x - 12 > x + 4}$.

Atrisinājumu kopa $\boldsymbol{x \in (8; +\infty)}$.

Ja $x = 10$ ievieto nevienādībā, tad iegūst
$3 \cdot 10 - 12 > 10 + 4$
jeb $18 > 14$ - pareiza nevienādība.
Ja $x = 5$ ievieto nevienādībā, tad iegūst
$3 \cdot 5 - 12 > 5 + 4$ jeb $3 > 9$ - aplama nevienādība.

Ekvivalentas nevienādības ir tādas nevienādības, kuru atrisinājumu kopas sakrīt.

Piemēram,

1) $\boldsymbol{\frac{x}{3} \leq 2x - 4}$ un $\boldsymbol{5x \geq 12}$ ***ir ekvivalentas*** nevienādības,

jo tām ir vienādas atrisinājumu kopas: $\boldsymbol{x \in [2.4; +\infty)}$.

2) $\boldsymbol{8 - 5x > x - 10}$ un $\boldsymbol{3x - 1 < 10}$ ***nav ekvivalentas*** nevienādības,

jo ....

- Nevienādības $\boldsymbol{A(x) < B(x)}$ un $\boldsymbol{B(x) > A(x)}$ ir ekvivalentas.
- Nevienādības $\boldsymbol{A(x) < B(x)}$ un $\boldsymbol{A(x) - B(x) < 0}$ ir ekvivalentas.
- Nevienādības $\boldsymbol{\frac{A(x)}{B(x)} > 0}$ un $\boldsymbol{A(x) \cdot B(x) > 0}$ ir ekvivalentas.

Ekvivalentas nevienādības var iegūt, veicot ekvivalentus pārveidojumus.

NEVIENĀDĪBU EKVIVALENTI PĀRVEIDOJUMI

• Nevienādības abām pusēm ***var pieskaitīt vai atņemt*** vienu un to pašu skaitli vai algebrisku izteiksmi, kas nemaina nevienādības definīcijas apgabalu.	$\mathbf{4x-3>21,}\ \Leftrightarrow$ $\mathbf{(4x-3)+3>21+3,}$ $\mathbf{4x>24.}$
• Nevienādības abas puses ***var reizināt vai dalīt ar vienu un to pašu pozitīvu skaitli*** vai algebrisku izteiksmi, kas nemaina nevienādības definīcijas apgabalu un kuras vērtības ir pozitīvas visā definīcijas apgabalā.	$\mathbf{25x\geq 100}\ \Big\vert : 25 \Leftrightarrow\ \mathbf{x\geq 4;}$ $\mathbf{\dfrac{x+2}{x^2+3}<6}\ \Big\vert \cdot (x^2+3)>0 \Leftrightarrow$ $\mathbf{x+2<6(x^2+3).}$
• Nevienādības abas puses ***reizinot vai dalot ar vienu un to pašu negatīvu skaitli*** vai tādu algebrisku izteiksmi, kas nemaina nevienādības definīcijas apgabalu un kuras vērtības ir negatīvas visā definīcijas apgabalā, ***maina*** nevienādības zīmi uz pretējo.	$\mathbf{-3x<15}\ \Big\vert : (-3) \Leftrightarrow\ \mathbf{x>-5.}$ $\mathbf{\dfrac{3x+2}{x-1}>-5}$ **nedrīkst** $\Big\vert \cdot (x-1)$

1. uzdevums. Noteikt, vai dotās nevienādības ir ekvivalentas?

a) $\mathbf{x+5-\dfrac{1}{x-4}>-x-3-\dfrac{1}{x-4}}$ un $\mathbf{x+5>-x-3}$;

b) $\mathbf{-\dfrac{3}{5}(2x-1)<-\dfrac{3}{5}(x+2)}$ un $\mathbf{2x-1<x+2}$;

c) $\mathbf{3x-1<x+3}$ un $\mathbf{(3x-1)^2<(x+3)^2}$;

d) $\mathbf{\dfrac{1}{2x^2+x+1}>\dfrac{1}{x^2+1}}$ un $\mathbf{2x^2+x+1>x^2+1}$.

Atrisinājums.

a)

b)

c)

d)

LINEĀRAS NEVIENĀDĪBAS

Definīcija. Par ***lineāru nevienādību*** sauc nevienādību, kas satur mainīgo pirmajā pakāpē.

$$ax+b>0\,,\quad ax+b<0\,,\quad ax+b\geq 0\,,\quad ax+b\leq 0\,,\quad a,\ b\in\mathbb{R}\,.$$

$5-2x\leq -2\,;\quad \frac{1}{3}x+7>x-2$

$3.5<2x-1.5$

Lai atrisinātu lineāru nevienādību, rīkojas šādi:

- ekvivalenti pārveido nevienādību tā, lai locekļi ar mainīgo (jeb nezināmo) būtu vienā nevienādības pusē, bet zināmie locekļi - otrā pusē;
- vienkāršo izteiksmes katrā nevienādības pusē;
- pieraksta atrisinājumu kopu.

Nevienādības atrisinājumu kopu var attēlot uz skaitļu ass, iekrāsojot vai iesvītrojot atbilstošo skaitļu ass daļu.

$2x-7.4\geq 4.6+3x$

$\Downarrow$

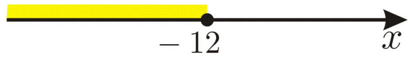
$2x-3x\geq 4.6+7.4$

$\Downarrow$

$-x\geq 12 \quad \Big|\cdot(-1)$

$\Downarrow$

$x\leq -12$ jeb $x\in(-\infty;-12]$



1. zīm.

2. uzdevums. Atrisināt divkāršu nevienādību $-4<-3x-1<7$.

$-4<-3x-1<23 \quad \Big|+1$

$-3<-3x<24 \quad \Big|:(-3)$

$1 \quad x \quad -8$ jeb

2. zīm.

LINEĀRAS NEVIENĀDĪBAS ATRISINĀJUMU KOPA

- Ja ekvivalentu pārveidojumu rezultātā iegūta ***aplama skaitliska nevienādība***, tad tas nozīmē, ka dotās nevienādības atrisinājumu kopa ir ***tukša kopa***.
- Ja ekvivalentu pārveidojumu rezultātā iegūta ***patiesa skaitliska nevienādība***, tad tas nozīmē, ka dotās nevienādības atrisinājumu kopa ir ***visu reālo skaitļu kopa*** ($\mathbb{R}$).

$5x+2>2x-(-7-3x)$

$3-x<2x+(6-3x)$

KVADRĀTNEVIENĀDĪBAS

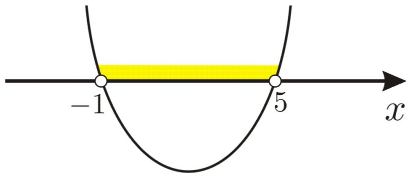
Definīcija. Par ***kvadrātnevienādību*** sauc nevienādību, kurai ir veids
$\boldsymbol{ax^2+bx+c>0}$ ($\geq$, $<$, $\leq$), kur $\boldsymbol{a \neq 0;\ a,\ b,\ c \in \mathbb{R}}$.

$\boldsymbol{5x^2+2x-1 \geq 0}$; $\boldsymbol{4x^2+ > 100}$;
$\boldsymbol{-2x^2+x \leq 0}$; $\boldsymbol{(x-1)(x+2) < 0}$.

Lai atrisinātu kvadrātnevienādību, rīkojas šādi:

- ekvivalenti pārveido nevienādību tā, lai visi locekļi būtu vienā nevienādības pusē;
- pārveido, lai $\boldsymbol{a>0}$; (šis punkts nav obligāts)
- atrod kvadrāttrinoma saknes;
- atliek iegūtās saknes uz skaitļu ass un uzskicē parabolu;
- iesvītro prasīto intervālu;
- pieraksta atrisinājumu kopu.

$$\boldsymbol{4x+5>x^2}$$
$$\Downarrow$$
$$\boldsymbol{-x^2+4x+5>0}$$
$$\Downarrow$$
$$\boldsymbol{x^2-4x-5<0}$$
$$\boldsymbol{x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16+20}}{2} \quad x_1=-1 \quad x_2=5}$$



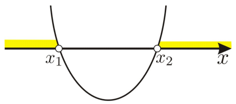
3. zīm.

$$\boldsymbol{x \in (-1;5)}$$

Kvadrātnevienādības atrisinājumu kopa ir atkarīga no $D=b^2-4ac$ zīmes.

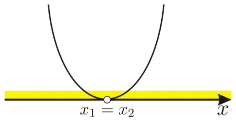
$\boxed{ax^2+bx+c>0}$

- $\boldsymbol{D>0\,;a>0\,;x_1,\ x_2}$ - kvadrāttrinoma saknes
  $\boldsymbol{x \in (-\infty;x_1)\bigcup(x_2;+\infty)}$



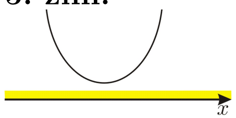
4. zīm.

- $\boldsymbol{D=0\,;a>0\,;x_1=x_2}$
  $\boldsymbol{x \in (-\infty;x_1)\bigcup(x_1;+\infty)}$



5. zīm.

- $\boldsymbol{D<0\,;a>0}$ kvadrāttrinomam reālo sakņu nav
  $\boldsymbol{x \in (-\infty;+\infty)}$



6. zīm.

3. uzdevums. Atrisināt kvadrātnevienādības:

a) $\boldsymbol{0.5(x-0.2)(x+3) \geq 0}$;

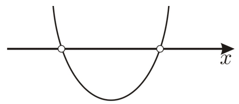
b) $\boldsymbol{x^2-8x+16>0}$;

c) $\boldsymbol{x^2-6x+14>0}$.

$$\boxed{ax^2 + bx + c < 0}$$

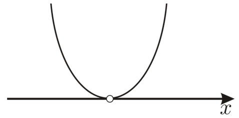
4. uzdevums. Iekrāso atrisinājumu kopu un pieraksti atbildi

- $D > 0\,;\, a > 0\,;\, x_1,\ x_2$ - kvadrāttrinoma saknes



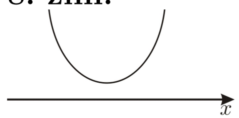
7. zīm.

- $D = 0\,;\, a > 0\,;\, x_1 = x_2$



8. zīm.

- $D < 0\,;\, a > 0$ kvadrāttrinomam reālo sakņu nav



9. zīm.

5. uzdevums. Atrisināt kvadrātnevienādības:

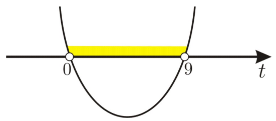
a) $(x-1)^2 < 0$;

b) $2x^2 - 3x + 5 < 0$;

c) $x^2 - 16 < 0$.

6. uzdevums. Atrisināt nevienādību $x^4 - 9x^2 < 0$.

Atrisinājums. Apzīmē $x^2 = t \geq 0$, tad $x^4 = t^2$,
tātad $t^2 - 9t < 0$
$t(t-9) < 0$
kvadrāttrinoma saknes $t_1 = 0,\ t_2 = 9$;

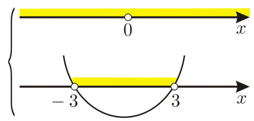


10. zīm.

kvadrātnevienādības atrisinājums

$$0 < t < 9$$
$$0 < x^2 < 9$$

$$\begin{cases} 0 < x^2 \\ x^2 < 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 > 0 \\ (x-3)(x+3) < 0 \end{cases}$$



11. zīm.

Atbilde: $x \in (-3;\, 0) \bigcup (0;\, 3)$.

7. uzdevums.
Atrisināt nevienādību $x^4 + 36 \leq 13x^2$.

DAĻVEIDA NEVIENĀDĪBAS

Definīcija. Par ***daļveida nevienādību*** sauc nevienādību, kurā mainīgais atrodas saucējā.

$\dfrac{\boldsymbol{f(x)}}{\boldsymbol{g(x)}} > \mathbf{0}$ ($\geq$, $<$, $\leq$), kur $\boldsymbol{f(x)}$, $\boldsymbol{g(x)}$ ir polinomi, $\boldsymbol{g(x) \not\equiv 0}$.

$$\frac{1}{x+5} + \frac{x}{x-1} < 3\,; \qquad \frac{x-2}{x+1} - \frac{3-x}{x-1} > 0\,;$$

$$\frac{x^2-3x+5}{2x^2-3x-1} \leq 0\,; \qquad \frac{x^2}{x-3} + 1 \leq \frac{x+6}{x-3}\,.$$

Risinot daļveida nevienādības

- visus locekļus pārnes vienā pusē;
- pārveido izteiksmi par daļu.

Daļveida nevienādības var atrisināt ar ***intervālu metodi***.

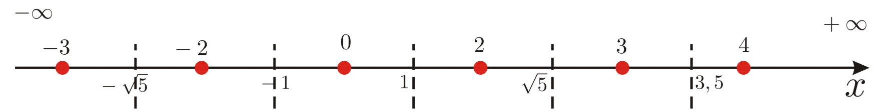
Algoritma soļi.

1. Katru polinomu, kas ietilpst kreisās puses izteiksmē, pielīdzina nullei un atrisina iegūtos vienādojumus (atrod saknes).
2. Iegūtās vērtības (saknes) atliek uz skaitļu ass (tās iekrāsojot vai neiekrāsojot, atkarībā no nevienādības zīmes un nevienādības definīcijas apgabala), tādā veidā sadala to intervālos.
3. Nosaka katra reizinātāja zīmi katrā intervālā, izvēloties kādu tā iekšējo punktu.
4. Nosaka nevienādības kreisās puses zīmi katrā intervālā.
5. Atzīmē (iekrāso uz skaitļu ass) tos intervālus, kas atbilst nevienādības veidam.
6. Pieraksta atbildi.

8. uzdevums. Atrisināt $\dfrac{\mathbf{2x^3 - 7x^2 - 2x + 7}}{\mathbf{5 - x^2}} \geq \mathbf{0}.$

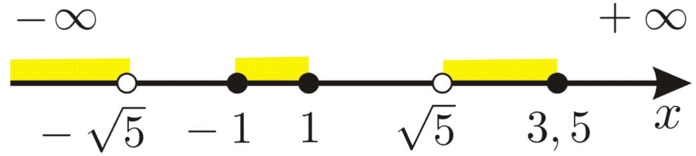
$2x^3 - 7x^2 - 2x + 7 = 0$
$2x(x^2-1) - 7(x^2-1) = 0$
$(x^2-1)(2x-7) = 0$
$(x-1)(x+1)(2x-7) = 0$
$x_1 = 1;\ x_2 = -1;\ x_3 = 3.5$

$5 - x^2 = 0$
$x^2 - 5 = 0$
$(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5}) = 0$
$x_4 = \sqrt{5};\ x_5 = -\sqrt{5}$



$x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$2x-7$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$5-x^2$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$
	$\frac{(-)(-)(-)}{(-)} = (+)$	$\frac{(-)(-)(-)}{(+)} = (-)$	$\frac{(+)(-)(+)}{(-)} = (+)$	$\frac{(+)(+)(-)}{(+)} = (-)$	$\frac{(+)(+)(-)}{(-)} = (+)$	$\frac{(+)(+)(+)}{(-)} = (-)$

12. zīm.



13. zīm.

9. uzdevums. Atrisināt nevienādības:

a) $\dfrac{(x-2)^2}{x(x-1)} < 0$

b) $\dfrac{x^2+8x+7}{4x^2+4x+1} > 0$

c) $\dfrac{x^3}{x-5} \geq \dfrac{25x}{x-5}$

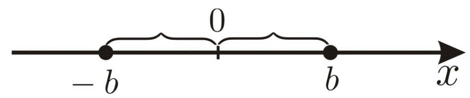
d) $\dfrac{x}{x+2} \leq \dfrac{3}{x-3}$

NEVIENĀDĪBAS, KAS SATUR MODUĻUS

$\boldsymbol{|f(x)| < a, \qquad |f(x)| > a, \qquad |f(x)| \le a, \qquad |f(x)| \ge a, \qquad a \in \mathbb{R}}$

Nevienādību ar moduli atrisināšanai var izmantot moduļa definīciju vai moduļa grafisko interpretāciju.

$$\boldsymbol{|\,x\,| = \begin{cases} x, & \text{ja} \quad x \ge 0, \\ -x, & \text{ja} \quad x < 0. \end{cases}}$$



14. zīm. $\boldsymbol{|\,x\,| = b > 0}$

10. uzdevums. Atrisināt nevienādību $\boldsymbol{|\,x+3\,| < 2}$.

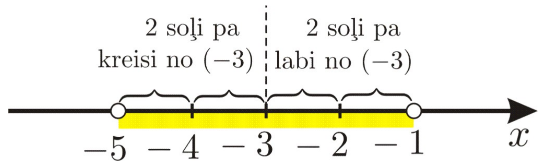
$$\begin{cases} x+3<2 \\ -(x+3)<2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<-1 \\ -x<5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<-1 \\ x>-5 \end{cases}$$

$x \in (-5;\,-1)$

$x+3=0 \;\Rightarrow\; x=-3$



15. zīm. $x \in (-5;\,-1)$

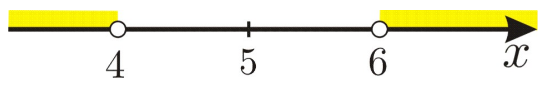
11. uzdevums. Atrisināt nevienādību $\boldsymbol{|\,5-x\,| \ge 1}$.

$$\left[\begin{array}{l} 5-x>1 \\ -(5-x)>1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x<4 \\ x>6 \end{array}\right.$$

$x \in (-\infty\,;\,4) \bigcup (6\,;+\infty)$

$5-x=0 \;\Rightarrow\; x=5$



16. zīm. $x \in (-\infty\,;\,4) \bigcup (6\,;+\infty)$

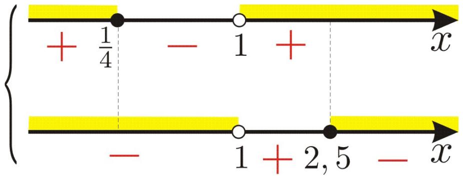
12. uzdevums. Atrisināt nevienādību $\boldsymbol{-|\,x+2.5\,| \ge -1.5}$.

13. uzdevums. Atrisināt nevienādību $\boldsymbol{|\,x^2+4x+2\,| \ge 1}$.

14. uzdevums. Atrisināt nevienādību $\left|\dfrac{\boldsymbol{x+2}}{\boldsymbol{x-1}}\right| \leq \mathbf{3}$.

$$-\mathbf{3} \leq \frac{\boldsymbol{x+2}}{\boldsymbol{x-1}} \leq \mathbf{3} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1} \geq -3 \\[2ex] \dfrac{x+2}{x-1} \leq 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{4x-1}{x-1} \geq 0 \\[2ex] \dfrac{-2x+5}{x-1} \leq 0 \end{cases}$$



17. zīm.

Atbilde: $\boldsymbol{x} \in (-\infty\,;\, \mathbf{0.25}] \bigcup [\mathbf{2.5}\,;\, +\infty)$

15. uzdevums. Atrisināt nevienādību

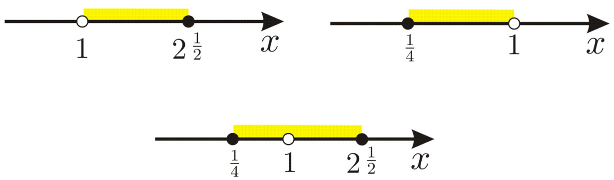
$$\left|\frac{\boldsymbol{x-3}}{\boldsymbol{x+1}}\right| \leq \mathbf{4}\,.$$

16. uzdevums. Atrisināt nevienādību $\left|\dfrac{\boldsymbol{x+2}}{\boldsymbol{x-1}}\right| \geq \mathbf{3}$.

$$\frac{\boldsymbol{x+2}}{\boldsymbol{x-1}} \geq \mathbf{3} \qquad \text{vai} \qquad \frac{\boldsymbol{x+2}}{\boldsymbol{x-1}} \leq -\mathbf{3}$$

$$\frac{\boldsymbol{-2x+5}}{\boldsymbol{x-1}} \geq \mathbf{0} \qquad\qquad \frac{\boldsymbol{4x-1}}{\boldsymbol{x-1}} \leq \mathbf{0}$$

$$\frac{\boldsymbol{2x-5}}{\boldsymbol{x-1}} \leq \mathbf{0}$$



18. zīm.

Atbilde: $\boldsymbol{x} \in [\mathbf{0.25}\,;\, \mathbf{1}) \bigcup (\mathbf{1}\,;\, \mathbf{2.5}]$

17. uzdevums. Atrisināt nevienādību

$$\left|\frac{\boldsymbol{x-3}}{\boldsymbol{x+1}}\right| \geq \mathbf{4}\,.$$