



**LATVIJAS
UNIVERSITĀTE**
ANNO 1919

IEGULDĪJUMS TAVĀ NĀKOTNĒ



PROFESIONĀLAJĀ IZGLĪTĪBĀ IESAISTĪTO
VISPĀRIZGLĪTOJOŠO MĀCĪBU PRIEKŠMETU PEDAGOGU
KOMPETENCES PAAUGSTINĀŠANA

Armands Gricāns

Ģeometriskie pārveidojumi (teorētiskais konspekts)

Materiāls izstrādāts

ESF Darbības programmas 2007. - 2013.gadam “Cilvēkresursi un nodarbinātība”
prioritātes 1.2. “Izglītība un prasmes”

pasākuma 1.2.1. “Profesionālās izglītības un vispārējo prasmju attīstība”

aktivitātes 1.2.1.2. “Vispārējo zināšanu un prasmju uzlabošana”

apakšaktivitātes 1.2.1.1.2. “Profesionālajā izglītībā iesaistīto pedagogu
kompetences paaugstināšana”

Latvijas Universitātes realizētā projekta

“Profesionālajā izglītībā iesaistīto vispārīzglītojošo mācību priekšmetu pedagogu
kompetences paaugstināšana”

(Vienošanās Nr.2009/0274/1DP/1.2.1.1.2/09/IPIA/VIAA/003,

LU reģistrācijas Nr.ESS2009/88) īstenošanai.

Rīga, 2011.

Teorētiskais konspekts ĢEOMETRISKIE PĀRVEIDOJUMI

Ar **ģeometrisko pārveidojumu** saprot tādu plaknes attēlojumu sevī, kas pēc noteikta likuma katru plaknes punktu attēlo tieši par vienu noteiktu plaknes punktu.

Tātad ģeometriskais pārveidojums ir funkcija, kuras definīcijas apgabals un vērtību kopa ir visa plakne. Ģeometriskais pārveidojums ir uzdots, ja zināms attēlošanas likums, kas nosaka, kā atrodams katra plaknes punkta P attēls P_1 .

PARALĒLĀ PĀRNESE

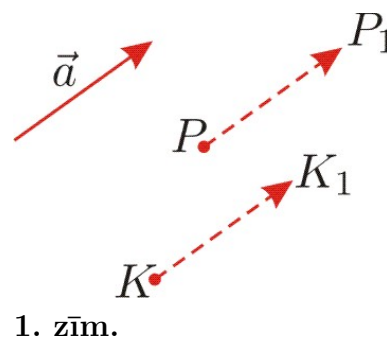
Definīcija. Par **paralēlo pārnesei** par vektoru \vec{a} sauc tādu pārveidojumu, kurā katrs punkts P attēlojas par tādu punktu P_1 , ka $\overrightarrow{PP_1} = \vec{a}$.

Paralēla pārnese ir definēta, ja uzdots pārveidojuma (jeb paralēlās pārnese) vektors \vec{a} .

Lai konstruētu punkta P attēlu paralēlajā pārnese par vektoru \vec{a} , ir jāatliek vektors \vec{a} no punkta P kā sākumpunkta un atliktā vektora galapunkts P_1 ir punkta P attēls.

$$\overrightarrow{PP_1} = \vec{a} \quad P \rightarrow P_1$$

$$\overrightarrow{KK_1} = \vec{a} \quad K \rightarrow K_1$$

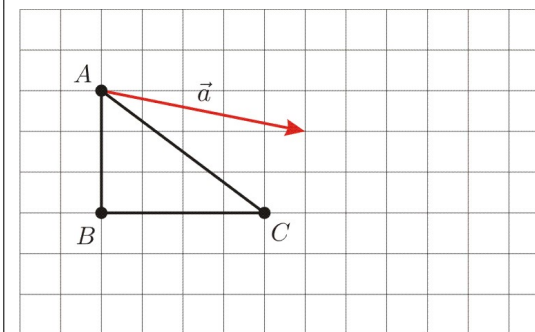


1. uzdevums.

Papildināt 2. zīmējumu, konstruējot trijstūra ABC attēlu paralēlajā pārnese par vektoru \vec{a} .

Pierakstīt, kādi punkti par kuriem punktiem attēlojas dotajā paralēlajā pārnese.

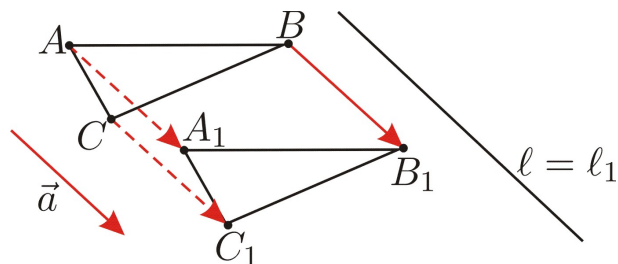
Ko var secināt par trijstūra ABC attēlu?



2. zīm.

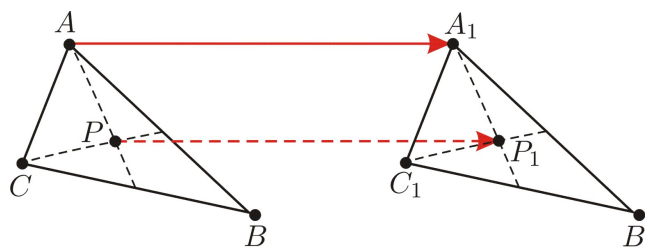
PARALĒLĀS PĀRNESES ĪPAŠĪBAS

1. Paralēlajā pārnēsē neeksistē nekustīgi punkti, visi punkti ir pārnesti par vienu un to pašu vektoru.
Nekustīgas paliek tās taisnes, kas ir paralēlas pārnesei vektoram.



3. zīm.

2. Figūras F un F_1 , kas iegūtas viena no otras paralēlajā pārnēsē, ir vienādas un vienādi novietotas plaknē.
Punktam P un tā attēlam P_1 ir viena un tā pati ģeometriskā jēga figūrās F un F_1 .

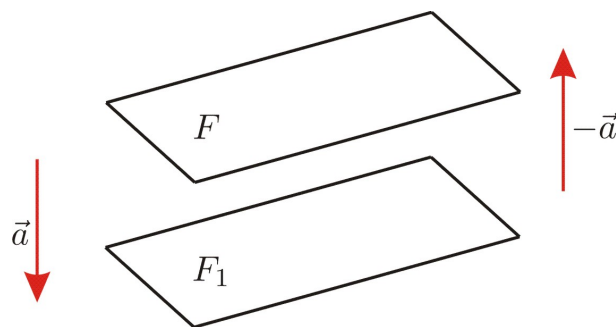


4. zīm.

3. Paralēlajā pārnēsē taisne attēlojas sevī vai par sev paralēlu taisni.

Skat. 3. un 4. zīm.

4. Ja paralēlajā pārnēsē par vektoru \vec{a} figūra F attēlojas par figūru F_1 , tad figūra F_1 attēlojas par figūru F paralēlajā pārnēsē par vektoru $-\vec{a}$.



5. zīm.

Ja punkts $P_1(x_1; y_1)$ paralēlajā pārnēsē par vektoru $\vec{a} = (a_x; a_y)$ attēlojas par punktu $P_2(x_2; y_2)$, tad:

- $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$;
- tā kā $\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{a}$, tad $x_2 - x_1 = a_x$ un $y_2 - y_1 = a_y$;
- tādējādi $x_2 = x_1 + a_x$ un $y_2 = y_1 + a_y$.

2. uzdevums.

Punkts $A(2; -3)$ paralēlajā pārnēsē par vektoru $\vec{a} = (-1; 5)$ attēlojas par punktu A_1 . Noteikt attēla A_1 koordinātas.

Atrisinājums.

$A_1(x; y)$. Tad $x = 2 + (-1) = 1$;
 $y = -3 + 5 = 2$. Tātad $A_1(1; 2)$.

3. uzdevums.

Trijstūris ABC ar virsotnēm $A(-1; 2)$, $B(-2; 3)$, $C(1; 1)$ paralēlajā pārnēsē par vektoru $\vec{n} = (4; 1)$ attēlojas par trijstūri $A_1B_1C_1$. Noteikt virsotņu A_1 , B_1 , C_1 koordinātas.

Atrisinājums.

A_1

B_1

C_1

4. uzdevums.

Nogrieznis AB paralēli pārnests par vektoru $\vec{m} = (1; -4)$. Iegūtā nogriežņa KL galapunkti ir $K(2; -2)$, $L(4; 1)$. Noteikt punktu A un B koordinātas.

Atrisinājums.

A

B

5. uzdevums.

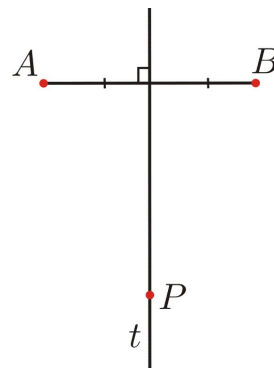
Doti divi trijstūri ABC un DEF , kuru koordinātas ir $A(-2; 5)$, $B(-1; 1)$, $C(-3; 2)$, $D(2; 3)$, $E(3; -1)$, $F(1; 0)$. Pierādīt, ka trijstūri ir vienādi, izmantojot paralēlo pārnēsi.

Atrisinājums.

AKSIĀLĀ SIMETRIJA

Definīcija. Punktus A un B sauc par *simetriskiem* (jeb *aksiāli simetriskiem*) attiecībā pret taisni t , ja šī taisne ir nogriežņa AB vidusperpendikuls.

Taisni t sauc par *aksiālās simetrijas asi*.



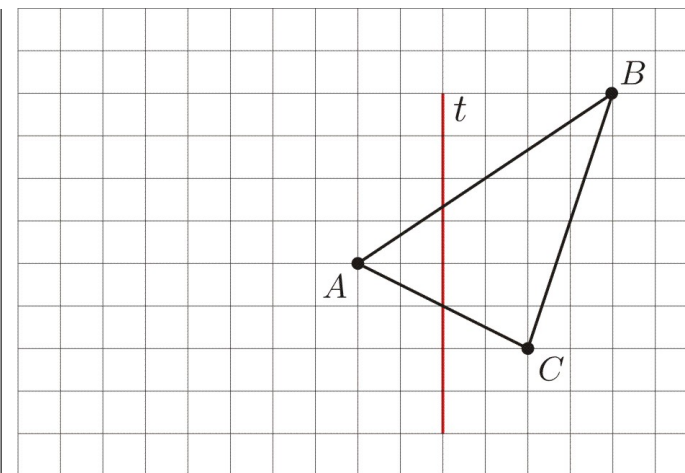
6. zīm.

Definīcija. Par *aksiālo simetriju* pret asi t sauc tādu pārveidojumu, kurā katrs punkts P attēlojas par tam simetrisku punktu P_1 attiecībā pret asi t .

Aksiālā simetrija ir definēta, ja uzdota simetrijas ass t .

6. uzdevums.

Papildināt 7. zīmējumu, konstruējot trijstūra ABC attēlu aksiālajā simetrijā pret asi t .
Pierakstīt, kādi punkti par kuriem punktiem attēlojas dotajā simetrijā.
Ko var secināt par trijstūra ABC attēlu?



7. zīm.

AKSIĀLĀS SIMETRIJAS ĪPAŠĪBAS

1. Aksiālajā simetrijā nekustīgi punkti ir tikai tie, kas atrodas uz simetrijas ass.

$$P \rightarrow P, \text{ jo } P \in t$$

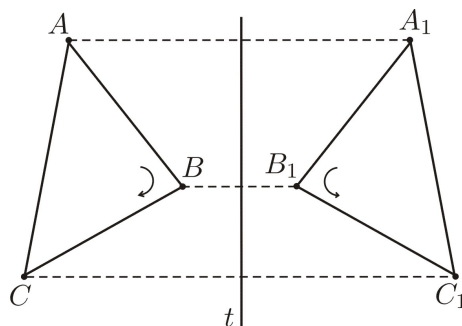
Taisne, kas perpendikulāra simetrijas asij, attēlojas par sevi.

$$AB \rightarrow BA$$

Skat. 6. zīm.

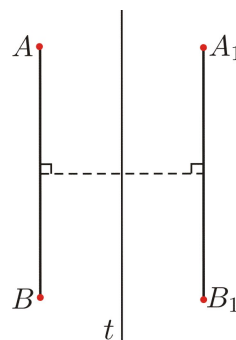
2. Figūras F un F_1 , kas iegūtas viena no otras aksiālajā simetrijā, ir vienādas, bet dažādi orientētas plaknē.

Punktam P un tā attēlam P_1 ir viena un tā pati ģeometriskā jēga figūrās F un F_1 .



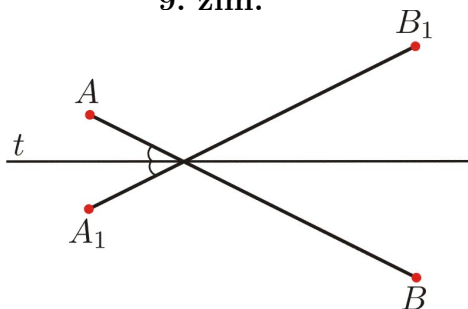
8. zīm.

3. Ja taisne (nogrieznis) ir paralēla simetrijas asij t , tad tā attēlojas par paralēlu taisni (nogriezni). Šai gadījumā taisnes (nogriežņi) atrodas vienādos attālumos no simetrijas ass.



9. zīm.

Ja taisne (nogrieznis) AB krusto simetrijas asi t , tad arī tās attēls A_1B_1 krusto asi t tajā pašā krustpunktā uz simetrijas ass, bez tam simetrijas ass t ir taisņu (nogriežņu) AB un A_1B_1 veidoto leņķu bisektrise.

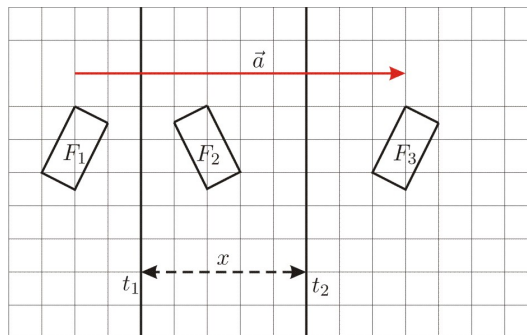


10. zīm.

4. Ja aksiālajā simetrijā pret asi t figūra F attēlojas par figūru F_1 , tad arī figūra F_1 attēlojas par figūru F attiecībā pret to pašu simetrijas asi t .

Skat. 8. zīm.

5. Divi pēc kārtas izpildīti aksiālās simetrijas pārveidojumi pret savstarpēji paralēlām simetrijas asīm ir ekvivalenti paralēlajai pārnesei par vektoru, kura virziens vērsts perpendikulāri simetrijas asīm un garums ir vienāds ar divkārtotu attālumu starp simetrijas asīm.



11. zīm.

$$|\vec{a}| = 2x$$

Aksiālajā simetrijā pret ordinātu asi Oy punkts $P(a; b)$ attēlojas par punktu $P_1(-a; b)$.
 Aksiālajā simetrijā pret abscisu asi Ox punkts $P(a; b)$ attēlojas par punktu $P_1(a; -b)$.
 Aksiālajā simetrijā pret taisni $y = x$ punkts $P(a; b)$ attēlojas par punktu $P_1(b; a)$.

Atrisinājums.

7. uzdevums. Trijstūris KLM ar virsotnēm $K(-1; 2)$, $L(-1; 4)$, $M(-4; 2)$ aksiālajā simetrijā attēlojas par trijstūri $K_1L_1M_1$. Noteikt virsotņu K_1 , L_1 , M_1 koordinātas, ja

- simetrijas ass ir koordinātu plaknes Oy ass;
- simetrijas ass ir koordinātu plaknes Ox ass;
- simetrijas ass ir taisne $y = x$.

a) $K_1(\quad ; \quad)$, $L_1(\quad ; \quad)$, $M_1(\quad ; \quad)$;

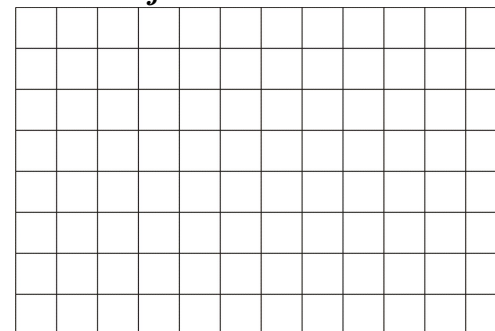
b) $K_1(\quad ; \quad)$, $L_1(\quad ; \quad)$, $M_1(\quad ; \quad)$;

c) $K_1(\quad ; \quad)$, $L_1(\quad ; \quad)$, $M_1(\quad ; \quad)$.

8. uzdevums. Divām mājām R un S nepieciešams pievienot elektrību, savienojot tās ar transformatoru T . Atbilstošais matemātiskais modelis: koordinātu plaknē atlikti punkti $R(1; 1)$ un $S(9; 3)$, punkts T atrodas uz Ox ass. Noteikt punkta T koordinātas, lai $RT + ST$ garums būtu mazākais iespējamais. Aprēķināt $RT + ST$.

(Izmantot 10. zīm.)

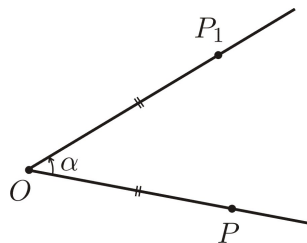
Atrisinājums.



12. zīm.

PAGRIEZIENS

Definīcija. Par *pagriezienu* par α grādu lielu leņķi ap centru O sauc tādu pārveidojumu, kurā katrs punkts P attēlojas par tādu punktu P_1 , ka $\angle POP_1 = \alpha$ un $PO = P_1O$.



13. zīm.

Pagrieziens ir definēts, ja uzdots pagriezienu centrs, pagriezienu leņķis un virziens.

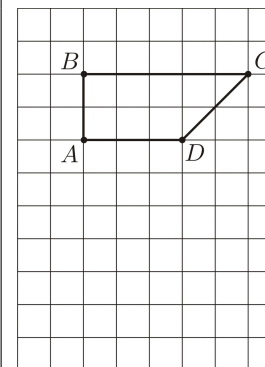
Pagriezienu leņķis ir pozitīvs, ja pagrieziens vērsts pretēji pulksteņrādītāju kustības virzienam; ja pagrieziens vērsts pulksteņrādītāju kustības virzienā, tad pagriezienu leņķis ir negatīvs.

9. uzdevums.

Konstruēt četrstūra $ABCD$ attēlu pagriezienā ap centru A par leņķi -90° .

Pierakstīt, kādi punkti par kuriem punktiem attēlojas dotajā pagriezienā.

Ko var secināt par četrstūra $ABCD$ attēlu?



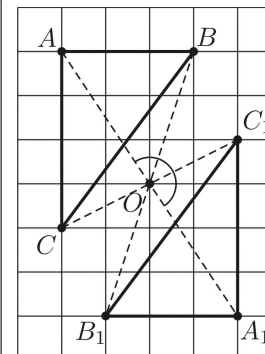
14. zīm.

Ja pagriezienu leņķis ir 180° , tad pagrieziens atbilst centrālajai simetrijai.

Definīcija. Divus punktus A un B sauc par *simetriskiem* (jeb *centrāli simetriskiem*) attiecībā pret punktu O , ja punkts O ir nogriežņa AB viduspunkts. Punktu O šai gadījumā sauc par *centrālās simetrijas centru*.

Definīcija. Figūru, kura centrālajā simetrijā attēlojas par sevi attiecībā pret kādu punktu, sauc par *centrāli simetrisku figūru*, bet šo punktu sauc par figūras *simetrijas centru*.

10. uzdevums. Kādi trijstūri un kādi četrstūri ir centrāli simetriski?

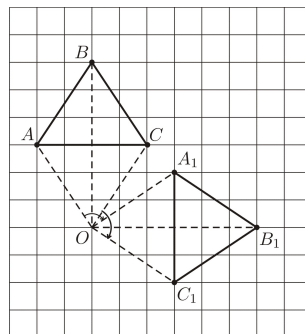


15. zīm.

PAGRIEZIENA ĪPAŠĪBAS

- Ja pagrieziena leņķis nav vienāds ar $360^\circ n$ ($n \in \mathbb{Z}$), tad pagriezienā vienīgais nekustīgs punkts ir pagrieziena centrs O .
Ja pagrieziena leņķis ir 180° (vai $180^\circ n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$), tad nekustīgas paliek tās taisnes, kas iet caur pagrieziena centru.

- Pagriezienā viena no otras iegūtas figūras F un F_1 ir vienādas un vienādi novietotas plaknē. Punktam P un tā attēlam P_1 ir viena un tā pati ģeometriskā jēga figūrās F un F_1 .



16. zīm.

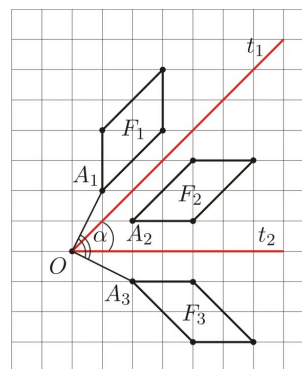
- Pagriezienā nogrieznis attēlojas par nogriezni, pie tam leņķis starp nogriezni un tā attēlu ir vienāds ar pagrieziena leņķi.

Skat. 16. zīm.

- Ja pagriezienā par leņķi α figūra F attēlojas par figūru F_1 , tad figūra F_1 attēlojas par figūru F tādā pagriezienā, kura centrs ir tas pats, bet pagrieziena leņķis ir $-\alpha$ (t.i., pagrieziena leņķis mainās uz pretējo leņķi).

Skat. 16. zīm.

- Divi pēc kārtas izpildīti aksiālās simetrijas pārveidojumi ar savstarpēji krustiskām simetrijas asīm ir ekvivalenti pagriezienam, kura centrs ir simetrijas asu krustpunkts un leņķis ir vienāds ar divkārtotu leņķi starp simetrijas asīm.



17. zīm.

Ja pagrieziena centrs ir koordinātu plaknes sākumpunkts O , tad

- pagriezienā $(O; 90^\circ)$ $P(a; b) \rightarrow P_1(-b; a)$;
- pagriezienā $(O; -90^\circ)$ $P(a; b) \rightarrow P_1(b; -a)$;
- pagriezienā $(O; 180^\circ)$ $P(a; b) \rightarrow P_1(-a; -b)$.

11. uzdevums. Trijstūra virsotņu koordinātas ir $A(1; 5)$, $B(2; 8)$, $C(3; 5)$. Noteikt tāda trijstūra virsotņu koordinātas, kas iegūts pagriezienā ap koordinātu plaknes sākumpunktu

- par 90° ;
- par -90° ;
- par 180° .

Atrisinājums.

a) $A_1(\quad ; \quad)$, $B_1(\quad ; \quad)$, $C_1(\quad ; \quad)$;

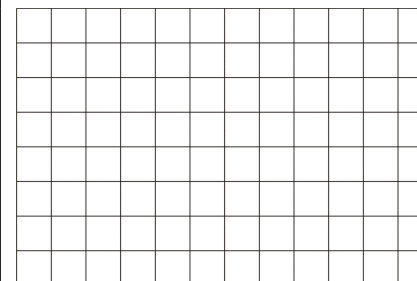
b) $A_1(\quad ; \quad)$, $B_1(\quad ; \quad)$, $C_1(\quad ; \quad)$;

c) $A_1(\quad ; \quad)$, $B_1(\quad ; \quad)$, $C_1(\quad ; \quad)$.

12. uzdevums. Regulāra trijstūra pagrieziena centrs atrodas:

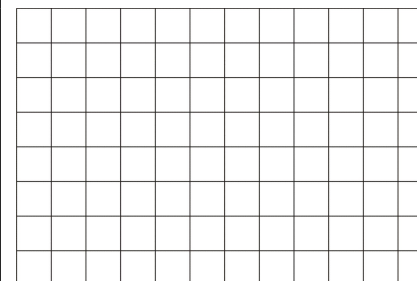
- trijstūra virsotnē;
- trijstūra mediānu krustpunktā.

Par cik grādiem šajos gadījumos trijstūris jāpagriež, lai tas attēlotos pats sevī?



18. zīm.

13. uzdevums. Regulārs trijstūris, kura malas garums ir 4 cm, pagriezts ap tā augstuma viduspunktu par 180° . Aprēķināt tās figūras laukumu, kura veidojas, pārklājoties dotajam trijstūrim un tā pagriezienā iegūtajam attēlam.



19. zīm.

HOMOTĒTIJA

Definīcija. Par *homotētiju* ar centru O un homotētijas koeficientu k (kur $k \neq 0$) sauc tādu pārveidojumu, kurā katrs punkts P attēlojas par tādu punktu P_1 , ka $\overrightarrow{OP_1} = k \cdot \overrightarrow{OP}$.

Homotētija ir definēta, ja uzdots homotētijas centrs un homotētijas koeficients.

Homotētijas īpašgadījumi:

ja $k = 1$, tad jebkura figūra attēlojas par sevi;

ja $k = -1$, tad pārveidojums ir centrālā simetrija jeb pagrieziens par 180° .

Lai konstruētu punkta P attēlu P_1 homotētijā ar centru O ($P \neq O$) un koeficientu k , rīkojas šādi:

ja $k > 0$, tad uz stara OP atliek nogriezni $OP_1 = k \cdot OP$;

ja $k < 0$, tad uz staram OP pretēja stara atliek nogriezni $OP_1 = |k| \cdot OP$.

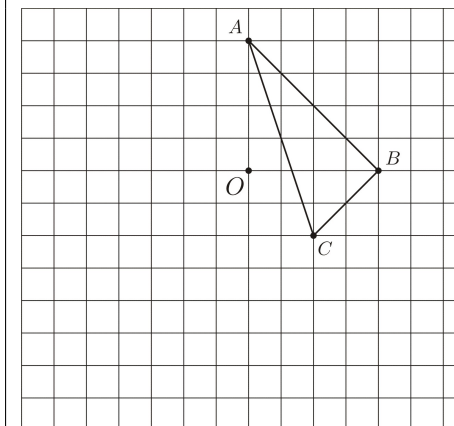
14. uzdevums.

Konstruēt trijstūra ABC attēlu homotētijā ar centru O un koeficientu

a) $k = 0.5$;

b) $k = -1.5$.

Ko var secināt par trijstūra ABC attēliem?



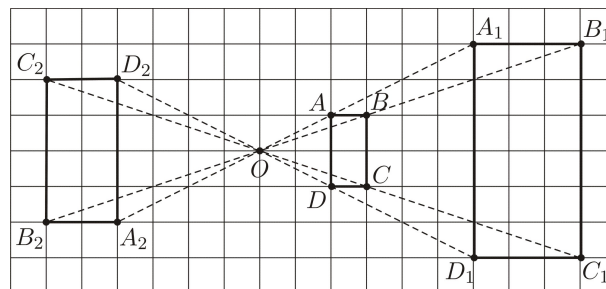
20. zīm.

Definīcija. Ja eksistē homotētija, kurā figūra F attēlojas par figūru F_1 , tad figūras F un F_1 sauc par *homotētiskām*.

HOMOTĒTIJAS ĪPAŠĪBAS

1. Homotētijā nekustīgs paliek homotētijas centrs un taisnes, ka novilkas caur to.
(Ja $k = 1$, tad visi plaknes punkti ir nekustīgi.)

2. Figūras F un F_1 , kas iegūtas viena no otras homotētijā ar centru O un koeficientu k , ir līdzīgas ar līdzības koeficientu $|k|$.
Punktam P un tā attēlam P_1 ir viena un tā pati ģeometriskā jēga figūrās F un F_1 .



21. zīm.

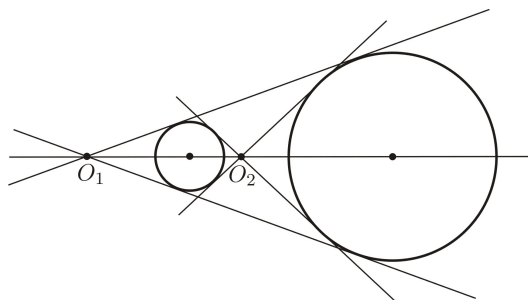
3. Homotētijā taisne attēlojas sevī (ja iet caur homotētijas centru) vai par sev paralēlu taisni.

Skat. 21. zīm.

4. Ja homotētijā ar centru O un koeficientu k figūra F attēlojas par figūru F_1 , tad arī figūra F_1 attēlojas par figūru F homotētijā ar to pašu centru O un koeficientu $\frac{1}{k}$.

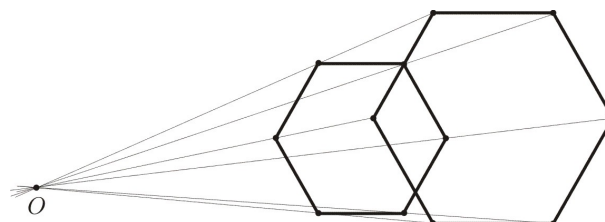
Skat. 21. zīm.

5. Jebkuras divas riņķa līnijas ir savstarpēji homotētiskas.



22. zīm.

6. Jebkuri divi viena veida regulāri daudzstūri ar atbilstoši paralēlām malām ir savstarpēji homotētiski.



23. zīm.

15. uzdevums.

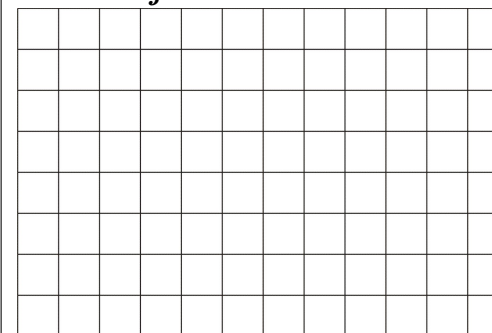
Divu līdzīgu sešstūru perimetru summa ir 100cm , bet to garākās diagonāles attiecas kā $1 : 4$. Aprēķināt katra sešstūra perimetru.

Atrisinājums.

16. uzdevums.

Izmantojot homotētiju, konstruēt trijstūri ABC , ja $\angle C = 45^\circ$, mediāna $CM = 3\text{cm}$, bet malu attiecība $AC : BC = 1 : 2$.

Atrisinājums.



24. zīm.